10

Suites

Limites de suites

Introduction...

Convergente et *divergente* étaient des adjectifs déjà utilisés en physique dès la fin du XVIème siècle avant d'apparaître en mathématique dans l'étude des suites (et des séries) un siècle plus tard.
Historiquement, Johannes Kepler (1571-1630, allemand) semble avoir été le premier à manipuler ce vocabulaire en optique, pour parler de lentille convergente ou divergente. Les travaux de Kepler en astronomie furent considérables : soutenant la thèse de l'héliocentrisme énoncé par Nicolas Copernic (1473-1543, polonais), il parvient à l'étude précise des trajectoires de la Terre ainsi que des autres corps en orbite autour du Soleil. On lui doit, à ce sujet, les trois fameuses lois qui portent son nom. Son apport mathématique est ainsi important dans l'étude des coniques (ellipses, paraboles, hyperboles), mais également sur le calcul des aires et des volumes. En particulier, il calcule des aires de surfaces en les découpant en surfaces *infinitésimales* d'aires connues puis en sommant : c'est le début de la théorie des indivisibles...
Comme nous l'avions évoqué dans le chapitre 6, la notion de limite fut périlleuse pour bon nombre de mathématiciens, et il a fallu attendre l'apport de Weierstrass au milieu du XIXème siècle pour clore le débat et donner la définition de limite que nous étudions et manipulons depuis.

Pour bien démarrer...

1 # Revoir le chapitre 5.

2 # Revoir les exercices sur les suites définies par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

3 # Rappeler les formes indéterminées :

4 # Rappeler les croissances comparées :

5 # Rappels : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \ldots\ldots$

6 # Comment étudier les variations d'une fonction ?

7 # Comment étudier les variations d'une suite ?

Dans tout ce chapitre, (u_n) désigne une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Les notions abordées seront sensiblement les mêmes que celles vues sur les fonctions ; à des détails près :

- la seule limite à étudier pour une suite est en $+\infty$
- dans bon nombre de cas, on ne connait pas le terme général de la suite étudiée (ce qui est rarement le cas sur les fonctions) ; par conséquent, les théorèmes "théoriques" vus en fin de chapitre seront plus souvent utilisés !

I Suites convergentes & suites divergentes

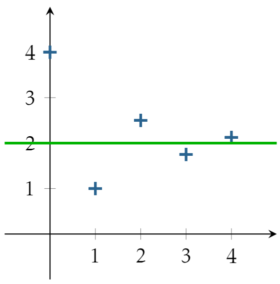
Définitions 1 - Suite convergente

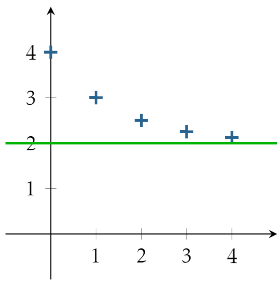
D1# Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) **converge vers ℓ** (ou que u_n tend vers ℓ) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in [\![\mathrm{N} ; +\infty[\![,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

D2# On dit que (u_n) est **convergente** s'il existe un réel ℓ tel que (u_n) converge vers ℓ.

En gros...
(u_n) tend vers ℓ lorsque u_n peut être rendu aussi proche que l'on veut de ℓ quitte à choisir un n suffisamment grand (ou *à partir d'un certain rang*).





Petite remarque
Contrairement au cas des courbes de fonctions, on ne parlera pas d'asymptote à la représentation graphique d'une suite.

Exemple 1

Démontrons que la suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$, converge vers 1.

✘ Attention !
Converger signifie "avoir une limite *finie*".
Ainsi, il y a deux cas de divergence : une suite peut diverger *sans admettre de limite* ou diverger vers $\pm\infty$.

Définitions 2 - Suites divergentes

D1# La suite (u_n) est **divergente** si elle n'est pas convergente.

D2# La suite (u_n) **diverge vers $+\infty$** lorsque :

$$\forall \mathrm{A} > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in [\![\mathrm{N} ; +\infty[\![,\ u_n \geq \mathrm{A}$$

En gros...
(u_n) diverge vers $+\infty$ lorsque u_n peut être rendu aussi grand que l'on veut quitte à choisir un n suffisamment grand (ou *à partir d'un certain rang*).

Remarque

Une définition analogue existe pour la divergence vers $-\infty$...

Exemple 2

Démontrons que la suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2$, diverge vers $+\infty$.

Dans tous les cas, comme pour la limite d'une fonction, on retrouve :

Propriété 1

Si une suite admet une limite (réelle ou infinie), alors celle-ci est unique.

> **Notation** : Comme pour les fonctions, on notera : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$.

★ Démonstration : Identique à celle faite sur les fonctions, à adapter dans le cas des suites bien entendu... ★

Un résultat qui sera régulièrement utile en pratique :

Propriété 2 - de recouvrement

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. (u_n) converge vers ℓ si, et seulement si, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes deux vers ℓ.

> **Petite remarque** : (u_{2n}) est la suite des termes de rangs pairs et (u_{2n+1}) est la suite des termes de rangs impairs.

★ Démonstration :

★

Exemples 3

> **♡ Astuce du chef ! ♡** Souvent, le sens direct (sa contraposée en fait) de cette propriété est utilisé pour établir qu'une suite n'a pas de limite...

E1 **Montrons que la suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$, diverge sans avoir de limite.**

E2 **Montrons que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, converge vers 0.**

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n}}{2n} = \dfrac{1}{2n}$ et $u_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{-1}{2n+1}$.
Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent donc toutes deux vers 0.

Conclusion : par propriété de recouvrement, la suite (u_n) converge vers 0.

II Limites usuelles & opérations sur les limites

Propriétés 3 - Limites usuelles

P1# Pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}} = 0$

P2# Pour tout $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ et pour tout $q \in]-1;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

P3# $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$

✘ Attention !
On démontre comme dans Exemples 3 - E1 : si $q \leq -1$, alors (q^n) diverge sans avoir de limite.

★ Démonstration : en revenant à la définition. Pour P2, on veille à manipuler $|q|$ dans le cas $q \in]-1;1[$... ★

Propriétés 4 - Opérations sur les limites

Petite remarque
Ce sont les mêmes propriétés que pour les limites de fonctions... Mais des rappels font toujours du bien.

P1# Pour la somme (les 9 cases donnent les limites de $u_n + v_n$) :

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'			
$+\infty$			
$-\infty$			

P2# Pour le produit (les 16 cases donnent les limites de $u_n \times v_n$) :

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$				
0				
$+\infty$				
$-\infty$				

P3# Pour le quotient (les 9 cases donnent les limites de $\dfrac{u_n}{v_n}$) :

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$				
0				
$+\infty$				
$-\infty$				

P4# Soient a et b des nombres réels ou $\pm\infty$. Soient f une fonction et (u_n) une suite pour lesquelles, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n)$ existe.
On a :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$$

♣ Méthode 1 ♣ Pour déterminer la limite d'une suite de terme général connu :

- déterminer la limite de chacun des termes apparaissant dans l'expression de u_n
- s'il n'y a pas de forme indéterminée, conclure en utilisant les règles opératoires ci-dessus ; sinon, se référer qui suit.

Exemples 4

E1 Considérons (u_n) une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$. Si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors :

À retenir...
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1}) = ...$

E2 Considérons (u_n) une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n^2 + 3$. La suite (u_n) est-elle convergente ?

★Subtile...★
Raisonnement intéressant dont on essaiera de se souvenir...

♣ Méthode 2 ♣ Pour lever une forme indéterminée :

- commencer par s'assurer que l'on a bien affaire à une forme indéterminée
- deux possibilités ensuite :
  1. factoriser par les termes qui divergent le plus vite vers l'infini
  2. utiliser la quantité conjuguée (parfois, quand il y a des racines carrées)
- **simplifier l'expression**, puis conclure en utilisant les règles opératoires sur les limites.

Petite remarque
n^α tend d'autant plus vite vers $+\infty$ que α est grand...

N'avons-nous pas l'impression de reproduire les mêmes choses que pour les fonctions ?! C'est normal, jusqu'à présent, les exemples concernent majoritairement des suites définies par leur terme général ; et on a la résultat immédiat suivant :

Propriété 5 - Lien fonction / suite

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.
Si $f(x)$ possède une limite en $+\infty$, alors $f(n)$ également et même : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

✘ Attention !
La réciproque est fausse : il se peut que $f(n)$ possède une limite, mais pas $f(x)$...
Exemple :

★ Démonstration : Traitons le cas où $f(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (les cas $-\infty$ et limite finie sont analogues).
Supposons donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

★

On peut alors retrouver sans travail supplémentaire les très fameuses :

Propriétés 6 - Croissances Comparées

Pour tous réels $\alpha, \beta, \gamma > 0$:

P1# $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\exp(n)^\alpha}{n^\beta} = +\infty$; $\forall q > 1,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n^\beta} = +\infty$; $\forall q \in]-1;1[,\ \lim\limits_{n\to+\infty} q^n n^\beta = 0$

P2# $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\beta}{\ln(n)^\gamma} = +\infty$

P3# $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\exp(n)^\alpha}{\ln(n)^\gamma} = +\infty$; $\forall q > 1,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{\ln(n)^\gamma} = +\infty$; $\forall q \in]-1;1[,\ \lim\limits_{n\to+\infty} q^n \ln(n)^\gamma = 0$

Petite remarque
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $q > 1$, $q^n = \exp(n\ln(q)) = \exp(n)^{\ln(q)}$ et $\ln(q) > 0$... Par conséquent, la deuxième CC est un cas particulier de la première, avec l'exponentielle.

On peut retenir ces croissances comparées ainsi :

Toute puissance de $\exp(n)$ l'emporte sur toute puissance de n, qui l'emporte sur toute puissance de $\ln(n)$.

croissances comparées et de les manipuler aisément... Si vous ne prenez pas l'habitude de bien les identifier, vous serez bloqués devant de "fausses" formes indéterminées.

Exemples 5

E1 Par croissances comparées : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n n^3 = 0$.

E2 Déterminons $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) - n + 2$.

E3 Déterminons $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n - \ln(n)}{n^3 - n^2\ln(n)}$.

✍ **Rédaction**
On pense à faire apparaître les CC comme dans le cours : sous forme de quotient !

E4 Déterminons $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n^5 \ln(n)^2}$.

III Des théorèmes bien pratiques...

Voici les théorèmes qui seront très utiles en pratique sur les suites (certains ont déjà été vus sur les fonctions et ne seront donc pas redémontrés).

III.1 Limites & inégalités

Propriétés 7

P1# Soit $M \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left.\begin{array}{l} \forall n\in\mathbb{N},\ u_n < M \\ (u_n) \text{ a une limite en } +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n \leq M$$

P2# On a :

$$\left.\begin{array}{l} \forall n\in\mathbb{N},\ u_n < v_n \\ (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ ont une limite en } +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

P3# Si (u_n) est croissante et converge vers un réel ℓ, alors (u_n) est majorée par ℓ.

✘ **Attention !**
Les inégalités strictes deviennent larges en passant à la limite.

Petite remarque
On adapte ces résultats avec $\geq$ ou, pour P3, dans le cas d'une suite décroissante qui converge vers ℓ.

★ Démonstration : Les démonstrations de P1 et P2 sont identiques à celles faites sur les fonctions. Démontrons P3, que nous n'avions pas démontrée sur les fonctions.

★

Exemples 6

E1 **Donnons deux suites (u_n) et (v_n) telles que :**

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 1\ ;\ v_n < 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n < 1$.

E2 **Cherchons deux suites (u_n) et (v_n) non constantes telles que :**

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$
- (u_n) et (v_n) ont même limite

III.2 Théorèmes de comparaison

Théorème 1 - d'encadrement

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left.\begin{array}{l}\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n \\ (u_n) \text{ et } (w_n) \text{ convergent toutes deux vers } \ell\end{array}\right\} \Longrightarrow (v_n) \text{ converge vers } \ell$$

★ Démonstration : Identique à celle faite sur les fonctions. ★

Exemples 7

E1 **Étudions la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}$:**

E2 **Considérons (u_n) une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. Que dire du comportement en l'infini de (u_n) ?**

À retenir...
(v_n) converge vers 0 si, et seulement si, $(|v_n|)$ converge vers 0.

Et le cas d'une limite infinie...

Théorème 2 - de comparaison

On a :

$$\left.\begin{array}{l}\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow (v_n) \text{ diverge vers } +\infty$$

Petite remarque

Théorème qui s'adapte (dans l'autre sens) dans le cas $-\infty$...

Exemple 8

Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + 2 \times (-1)^n$.

III.3 Théorème de limite monotone

Nous l'avions vu sur les fonctions ; mais puisque l'on connaît bien souvent une expression explicite d'une fonction, il est rarement utilisé... En revanche, pour les suites dont le terme général est inconnu, le théorème suivant pourra être très utile :

Théorème 3 - de limite monotone

1. Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge.
2. Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge.
3. Si (u_n) est croissante et non majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
4. Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

★ Démonstration : Les 1 et 2 sont équivalentes et nécessitent des outils hors programme...

★

EXEMPLE 9

Considérons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xe^{-x}$ et (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \pm 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

★ CLASSIQUE ! ★
Il faut savoir refaire chacune des questions de cet exemple en très peu de temps !

- Dressons le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$, résolvons l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, et représentons l'allure de $\mathcal{C}_f$ ainsi que les premiers termes de (u_n) dans les cas $u_0 = -1$ et $u_0 = 1$.

- **Cas $u_0 = 1$.**
  - Démontrons que la suite (u_n) est décroissante et bornée par 0 et 1.
  - Déduisons-en que (u_n) converge vers une limite ℓ puis déterminons ℓ.

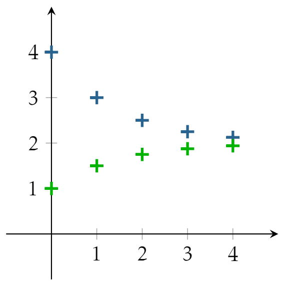
VOCABULAIRE
Un **point fixe de** f est un réel a qui vérifie $f(a) = a$.

- **Cas $u_0 = -1$.**
  - Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n \leq -1$.

  - Déduisons-en que (u_n) diverge vers $-\infty$.

♡ Astuce du chef! ♡
Pour montrer qu'une suite n'est pas minorée (ou majorée), on raisonne souvent par l'absurde...

III.4 Théorème des suites adjacentes



Définition 3 - Suites adjacentes

On dit que les suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** lorsque :
1. (u_n) est croissante
2. (v_n) est décroissante
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Théorème 4 - des suites adjacentes

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

★ Démonstration : Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes telles que :
1. (u_n) est croissante
2. (v_n) est décroissante
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Idée de la démonstration
Si on prouve que (u_n) et (v_n) convergent, alors on pourra écrire $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n - \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et la troisième hypothèse impliquera alors qu'elles convergent vers la même limite... Pensons ici au théorème de convergence monotone, puisque (u_n) et (v_n) sont monotones...

★

Exemple 10

Considérons les suites (u_n) et (v_n), définies sur $\mathbb{N}^*$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Montrons que (u_n) et (v_n) convergent vers le même réel.

Petite remarque

Il arrive parfois que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) soient adjacentes... Dans ce cas, en combinant le théorème 4 et la propriété 2, on obtient que la suite (u_n) est convergente.