Exercices du chapitre 10
Limites de suites

N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●●○○ Exercice 1 - Vrai ou faux ?

1. Si (u_n) est croissante, alors elle est minorée.
   VRAI
   Elle est alors minorée par son premier terme (immédiat par récurrence).
2. Si (u_n) est décroissante et converge vers ℓ, alors (u_n) est minorée par ℓ.
   VRAI
   Supposons que la suite (u_n) est décroissante et converge vers ℓ. Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \ell$.
   Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} < \ell$.
   La suite (u_n) étant décroissante, on a également :
   $$\forall n \in [\![n_0 ; +\infty [\![,\ u_n \leq u_{n_0}$$
   Mais (u_n) est convergente. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient :
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq u_{n_0}$$
   Autrement dit :
   $$\ell \leq u_{n_0}$$
   Absurde, car on avait $u_{n_0} < \ell$.
3. Si (u_n) est positive et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \dfrac{1}{n^2+1}$, alors (u_n) converge.
   VRAI
   Soit (u_n) une telle suite. On a alors :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n < \frac{1}{n^2+1}$$
   Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$.
   Ainsi, par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   Par conséquent, la suite (u_n) converge (vers 0).
4. Si (u_n) est strictement croissante et strictement positive, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
   FAUX
   Considérons la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.
   On vérifie sans mal que (u_n) est strictement croissante, strictement positive ; et pourtant, elle converge vers 1.
5. (u_n) converge si, et seulement si, $(|u_n|)$ converge.
   FAUX
   Considérons la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$.
   La suite $(|u_n|)$ converge, puisqu'elle est constante égale à 1 ; et pourtant, la suite (u_n) diverge (sans avoir de limite).

   Petite remarque
   En revanche, le sens direct est vrai.
6. (u_n) converge vers 1 si, et seulement si, $(|u_n|)$ converge vers 1.
   FAUX
   Même contre-exemple que la question précédente.
7. Si (u_n) est bornée, alors elle converge.
   FAUX
   Même contre-exemple que la question précédente.
8. Si (u_n) est convergente, alors elle est bornée.
   VRAI
   Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ. Par conséquent :
   $$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in [\![N ; +\infty [\![,\ |u_n - \ell| \leq \epsilon$$
   En particulier, pour $\epsilon = 1$, il existe un entier N tel que :
   $$\forall n \in [\![N ; +\infty [\![,\ \ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1$$
   Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geq N}$ est bornée.
   Si $N = 0$, la suite (u_n) est ainsi bornée. Sinon, en posant $m_1 = \min\{u_0, u_1, ..., u_{N-1}\}$ et $M_2 = \max\{u_0, u_1, ..., u_{N-1}\}$ (ces deux nombres existent bien, car ils sont le min et le max d'un **ensemble fini**), on a :
   $$\forall n \in [\![0 ; N-1]\!],\ m_1 \leq u_n \leq M_2$$
   Par conséquent, en posant $m = \min(m_1, \ell - 1)$ et $M = \max(m_2, \ell + 1)$, on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M$$
   La suite (u_n) est donc bornée.

   ✘ Attention !
   Un ensemble fini possède toujours un minimum et un maximum ! Ce n'est pas toujours le cas d'un ensemble infini ($\mathbb{N}$ n'a pas de max, $\mathbb{Z}$ n'a ni min ni max, $\mathbb{R}$ non-plus).
9. Si la suite $(u_n - v_n)$ possède une limite, alors les suites (u_n) et (v_n) également.
   FAUX
   Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = (-1)^n$...

10. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, alors (u_n) est convergente.
FAUX
Considérons la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$.
Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, mais ne convergent pas vers la même limite ! (u_n) est ainsi divergente.

11. Si (u_n) et (v_n) ont la même limite, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
FAUX
Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n\ ;\ v_n = n^2$...

Petite remarque
C'est vrai s'il n'y a pas de FI... Il faut donc chercher un contre-exemple avec une FI "$\frac{\infty}{\infty}$" ou "$\frac{0}{0}$".

12. Si (u_n) converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
FAUX
Considérons la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = e^{-n}$.
la suite (u_n) converge vers 0, et pourtant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1}$$

Ici, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} \neq 1$.

13. Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors elle est croissante à partir d'un certain rang.
FAUX
Considérons la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n + (-1)^n$.
- On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq n-1$. Et $\lim\limits_{n\to+\infty} n_1 = +\infty$.
  Par théorème de comparaison, on obtient :
  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
- "croissante à partir d'un certain rang" signifie : "$\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \in [\![\mathrm{N};+\infty[\![,\ u_n \leq u_{n+1}$".
  Montrons donc :
  $$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \exists n \in [\![\mathrm{N};+\infty[\![\ /\ u_n > u_{n+1}$$
  Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. Posons $n = 2\mathrm{N}$. On a ainsi : $u_n = u_{2\mathrm{N}} = 2\mathrm{N} + (-1)^{2\mathrm{N}} = 2\mathrm{N}+1$ et $u_{n+1} = u_{2\mathrm{N}+1} = 2\mathrm{N}+1+(-1)^{2\mathrm{N}+1} = 2\mathrm{N}$. Ainsi : $u_n > u_{n+1}$.

La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$, mais n'est pas "croissante à partir d'un certain rang".

●○○○ Exercice 2 - Calcul de limites

Déterminer la limite de chaque suite dont on donne le terme général :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^2+3}{e^{-n}+1}$
Par opérations, on a directement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^2-n+3}{n+7}$
En levant la FI, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\ln(n)+n}{e^{-n}}$
Par opérations, on a directement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{e^n}{2^n}$
On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{e}{2}\right)^n$. Et $\dfrac{e}{2} > 1$... D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{5^n - e^n}{2^n+3^n}$
En levant la FI, on obtient (puisque $\dfrac{5}{3} > 1$) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

6. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\left(e^{1/n}-1\right)$
On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{e^{1/n}-1}{1/n}$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; et $\lim\limits_{\mathrm{X}\to 0} \dfrac{e^{\mathrm{X}}-1}{\mathrm{X}} = 1$... D'où par composition : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

7. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^3 - \ln(n)}{5n^3+2}$
En levant la FI (et par CC), on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{5}$.

8. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln(n^2+2n+1) - \ln(n^2)$
On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+2n+5}{n^2}\right)$. En levant la FI, on obtient, par composition : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

9. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n+1}+3}$
En levant la FI, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

10. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{3n^2+5n+1} - \sqrt{n^2+2n+5}$
En levant la FI (en factorisant par $\sqrt{n^2} = n$, car $n \geq 0$), on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

11. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{3n^2+5n+1} - \sqrt{3n^2+2n+1}$

En levant la FI (expression conjuguée, puis factorisation), on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2\sqrt{3}}$.

●●●○ Exercice 3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0;1]$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$.

Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

- Puisque la suite (u_n) est à valeurs dans $[0;1]$, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_n \le 1$$
Or, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \ge 0$ (car (v_n) également à valeurs dans $[0;1]$), d'où :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_n v_n \le v_n$$
On obtient ainsi, (v_n) étant majorée par 1 :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n v_n \le v_n \le 1$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$.
Par théorème d'encadrement, on obtient :
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$$
- De la même façon (ou en évoquant la symétrie des rôles de (u_n) et (v_n) dans l'énoncé), on obtient :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

●●○○ Exercice 4 - Suite définie par une somme

Considérons la suite $(S_n)_{n\in[\![2;+\infty[\![}$ définie par : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.

1. Calculer S_2 et S_3.

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k^2-1} \\ &= \frac{1}{3} \\ S_3 &= \sum_{k=2}^{3} \frac{1}{k^2-1} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{11}{24} \end{aligned}$$

2. Étudier les variations de la suite $(S_n)_{n\in[\![2;+\infty[\![}$.

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. On a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} + \frac{1}{(n+1)^2-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2-1} \end{aligned}$$

Or $n \in [\![2;+\infty[\![$, donc $(n+1)^2 - 1 > 0$.
D'où :
$$S_{n+1} - S_n > 0$$

Conclusion : la suite $(S_n)_{n\in[\![2;+\infty[\![}$ est strictement croissante.

3. Justifier l'existence de deux réels a et b, à déterminer, tels que pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$:
$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$$

On remarque que, pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$,
$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{k-1} - \frac{\frac{1}{2}}{k+1}$$

4. En déduire, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, une expression simplifiée de S_n puis la limite de la suite $(S_n)_{n\in[\![2;+\infty[\![}$.

- Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} && \text{d'après la question précédente}\\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{\frac{1}{2}}{k-1} - \frac{\frac{1}{2}}{k+1} \right) && \text{par linéarité de la somme}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} \right) && \text{par télescopage}\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

5. Par opérations sur les limites, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$$

●●●○ Exercice 5 - Suite définie par une somme

Considérons la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k! \geq 2^{k-1}$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $k = 1$:
$1! = 1$ et $2^{1-1} = 2^0 = 1$. D'où $1! \geq 2^{1-1}$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons "$k! \geq 2^{k-1}$" et montrons "$(k+1)! \geq 2^k$".
Par hypothèse de récurrence :

$$k! \geq 2^{k-1}$$

  - D'une part, puisque $k+1 > 0$, on a :

$$(k+1)! \geq (k+1)2^{k-1}$$

  - Mais $k \in \mathbb{N}^*$, donc :

$$k+1 \geq 2$$

  Ainsi, puisque $2^{k-1} > 0$:

$$(k+1)2^{k-1} \geq 2^k$$

Par transitivité, on obtient finalement :

$$(k+1)! \geq 2^k$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k! \geq 2^{k-1}$.

2. En déduire que la suite (S_n) converge vers un réel appartenant à l'intervalle $]2;3]$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ k! \geq 2^{k-1}$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$ ($\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 2^{k-1} > 0$) :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

En sommant de 1 à n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

D'où :

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

Autrement dit :

$$S_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

- Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i && \text{car } \frac{1}{2} \neq 1\\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\\
&= 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n && \text{car } 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0\\
&\leq 2
\end{aligned}$$

- Des deux points précédents, on obtient, par transitivité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leq 3$$

Et comme $S_0 = 1$, on a même :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leq 3$$

la suite (S_n) est donc majorée par 3.

- Par ailleurs, la suite (S_n) est croissante (immédiat). Étant majorée (par 3 d'après le point précédent), d'après le théorème de convergence monotone, la suite (S_n) converge vers un réel ℓ.
- Enfin, puisque $S_2 = \frac{5}{2}$ et que (S_n) est croissante, on a :

$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![, \ \frac{5}{2} \leq S_n \leq 3$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\frac{5}{2} \leq \ell \leq 3$$

En particulier :

$$\ell \in]2;3]$$

Conclusion : la suite (S_n) converge vers un réel appartenant à l'intervalle $]2;3]$.

●●○○ Exercice 6 - Suite définie par une somme

Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a, puisque $\sqrt{k+1} + \sqrt{k} \neq 0$:

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) &= 2\frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \\ &= 2\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \end{aligned}$$

Or, par croissance de $\sqrt{.}$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{k+1} \geq \sqrt{k}$$

D'où :

$$\sqrt{k+1} + \sqrt{k} \geq 2\sqrt{k}$$

Puis, par décroissance de $\frac{1}{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^+_*$ ($\sqrt{k+1} + \sqrt{k}$ et $2\sqrt{k}$ sont dans $\mathbb{R}^+_*$) :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

Par conséquent :

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$.

2. Conclure que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \ \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

D'où, en sommant de 1 à n :

$$S_n \leq \sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

Or, par linéarité de la somme, puis par télescopage, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) &= 2\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\right) \\ &= 2(\sqrt{n+1} - 1) \end{aligned}$$

On a ainsi établi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

   - Mais $\lim_{n\to+\infty} 2(\sqrt{n+1} - 1) = +\infty$.
   Ainsi, par théorème de comparaison :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

Conclusion : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

●●○○ Exercice 7 - Suites définies par une somme

Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2k}} \quad ; \quad v_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2k}}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}$.

Soit $k \in [\![1;n]\!]$. On a alors :

$$2 \leq 2k \leq 2n$$

Puis :

$$n^2+2 \leq n^2+2k \leq n^2+2n$$

Par croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^+$ (les trois quantités étant bien positives) :

$$\sqrt{n^2+2} \leq \sqrt{n^2+2k} \leq \sqrt{n^2+2n}$$

Et par décroissance de $\dfrac{1}{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_*^+$ (les trois quantités étant bien strictement positives) :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$$

Conclusion : pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}$.

2. En déduire que pour pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}} \leq u_n \leq \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$$

D'où, en sommant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}} \leq u_n \leq \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}}$.

Pourquoi ?
Les termes généraux des sommes de gauche et droite ne dépendent pas de k...

3. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer la valeur de sa limite.

- D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} &= \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{2}{n}}} \qquad n \in \mathbb{N}^*, \text{ donc } \sqrt{n^2}=n \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}\end{aligned}$$

Or, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = 1$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} = 1$$

- De même, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} = 1$$

Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geq \dfrac{n}{\sqrt{3}}$. En déduire la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **1.** :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$$

D'où, en sommant de 1 à n^2 :

$$\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \leq v_n \leq \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$$

Ainsi :

$$v_n \geq \frac{n^2}{\sqrt{n^2+2n}}$$

Or :

$$\begin{aligned}\frac{n^2}{\sqrt{n^2+2n}} &= \frac{n^2}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{2}{n}}} \\ &= \frac{n}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}\end{aligned}$$

Et, puisque $n \geq 1$, on a :

$$\frac{2}{n} \leq 2$$

D'où, par croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^+$ et décroissance de $\frac{1}{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geq \frac{n}{\sqrt{3}}$.

- Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{3}} = +\infty$, on conclut par théorème de comparaison.

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

●○○○ Exercice 8 - Qui va le plus vite ?

Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{e^n}{n!}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) est-elle monotone ?
   - $u_0 = 1$, $u_1 = e$, $u_2 = \frac{e^2}{2}$ et $u_3 = \frac{e^3}{6}$
   - On a :

$$\begin{array}{rcl} u_2 - u_1 & = & \frac{e^2}{2} - e \\ & = & \frac{e(e-2)}{2} \\ & > & 0 \end{array} \quad \text{car } e > 2$$

et :

$$\begin{array}{rcl} u_3 - u_2 & = & \frac{e^3}{6} - \frac{e^2}{2} \\ & = & \frac{e^2(e-3)}{6} \\ & < & 0 \end{array} \quad \text{car } e < 3$$

Conclusion : la suite (u_n) n'est pas monotone.

2. Démontrer que la suite est décroissante à partir du rang 2.

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. On a :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{e^n}{n!} \\ & = & \frac{e^n(e-(n+1))}{(n+1)!} \\ & < & 0 \end{array} \quad n \geq 2, \text{ donc } e < 3 \leq n+1$$

Conclusion : la suite (u_n) est (strictement) décroissante à partir du rang 2.

3. Montrer que pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$: $u_{n+1} \leq \frac{e}{3} u_n$.

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. On a :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - \frac{e}{3}u_n & = & \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{e^{n+1}}{3n!} \\ & = & \frac{e^{n+1}(3-(n+1))}{(n+1)!} \\ & \leq & 0 \end{array} \quad n \geq 2, \text{ donc } n+1 \geq 3$$

Conclusion : pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$: $u_{n+1} \leq \frac{e}{3} u_n$.

4. En déduire que pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$: $u_n \leq \left(\frac{e}{3}\right)^{n-2} u_2$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 2$:
  $\left(\frac{e}{3}\right)^{2-2} u_2 = u_2 \geq u_2$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Supposons "$u_n \leq \left(\frac{e}{3}\right)^{n-2} u_2$" et montrons "$u_{n+1} \leq \left(\frac{e}{3}\right)^{n-1} u_2$".
  Par hypothèse de récurrence :
  $$u_n \leq \left(\frac{e}{3}\right)^{n-2} u_2$$
  D'où, en multipliant par $\frac{e}{3}$:
  $$\frac{e}{3}u_n \leq \left(\frac{e}{3}\right)^{n-1} u_2$$
  Or, d'après la question précédente :
  $$u_{n+1} \leq \frac{e}{3}u_n$$
  Par conséquent, par transitivité :
  $$u_{n+1} \leq \left(\frac{e}{3}\right)^{n-1} u_2$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$: $u_n \leq \left(\frac{e}{3}\right)^{n-2} u_2$.

5. Qui tend plus vite vers $+\infty$ entre e^n et $n!$?
Puisque (u_n) est à termes positifs, d'après la question précédente, on a :
$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ 0 \leq u_n \leq \left(\frac{e}{3}\right)^{n-2} u_2$$
Or, puisque $\frac{e}{3} \in]-1;1[$:
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^{n-2} u_2 = 0$$
Ainsi, par théorème d'encadrement :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
Conclusion : $n!$ tend plus vite vers $+\infty$ que e^n.

> **Petite remarque**
> On a même, pour tout $q > 1$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$.
> Ce résultat se démontrerait de façon analogue...

●●○○ Exercice 9 - Suites adjacentes

Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Que peut-on en conclure ?
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \\ &> 0 \end{aligned}$$
   Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est (strictement) croissante.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n.n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} \\ &= \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+1)!} + \frac{n}{n(n+1)(n+1)!} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} \\ &< 0 \end{aligned}$$
   Par conséquent, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est (strictement) décroissante.
   - De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{n.n!}$, donc :
$$\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$$

Conclusion : les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
Par conséquent, elles convergent toutes deux vers le même réel.

> **☞ Pour info...**
> On démontrera plus tard dans l'année que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent toutes deux vers e.

2. Écrire un programme Python qui détermine et affiche le plus petit entier n à partir duquel $|u_n - v_n| < 10^{-5}$.

```python
u=2 #on initialise u et v au rang 1
v=3
n=1
facto_n=1
while abs(u-v)>=10**(-5):
    n=n+1
    facto_n=facto_n*n
    u=u+1/facto_n
    v=u+1/(n*facto_n)
print(n)
```

> **Petite remarque**
> Le programme affichera la valeur 8.

●●○○ Exercice 10 - Suites adjacentes

Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & S_{2n+2} - S_{2n} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\ & = & \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \dfrac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \\ & = & \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{-1}{2n+1} \\ & = & \dfrac{-1}{(2n+1)(2n+2)} \\ & < & 0 \end{array}$$

Par conséquent, la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est (strictement) décroissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} - v_n & = & S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} \\ & = & \dfrac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} \\ & = & \dfrac{-1}{2n+3} + \dfrac{1}{2n+2} \\ & = & \dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)} \\ & > & 0 \end{array}$$

Par conséquent, la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est (strictement) décroissante.

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n+1} - S_{2n} = \dfrac{-1}{2n+1}$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$$

Conclusion : les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

2. Que peut-on en conclure ?
   - Puisque les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, on en déduit qu'elles convergent toutes deux vers le même réel ℓ.
   - Puisque $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent toutes deux vers le même réel ℓ, par propriété de recouvrement, on en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers ℓ.

Conclusion : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

☞ Pour info...
On démontrera plus tard dans l'année que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $-\ln(2)$.

●●●○ Exercice 11 - Suite définie par un produit

Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + a^k)$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2 dans les cas où $a = \dfrac{1}{2}$ et $a = 2$.
   ...
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   Pour la suite de l'étude, nous allons distinguer deux cas.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & \displaystyle\prod_{k=0}^{n+1} (1 + a^k) - \prod_{k=0}^{n} (1 + a^k) \\ & = & (1 + a^{n+1} - 1) \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (1 + a^k) \\ & = & a^{n+1} \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (1 + a^k) \end{array}$$

Or $a \in \mathbb{R}_*^+$, donc $a^{n+1} > 0$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (1 + a^k)$ est un produit de facteurs positifs, donc est positif.
Par conséquent :

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

Conclusion : la suite (u_n) est croissante.

3. **Si $0 < a < 1$.**
   3.a. Démontrer que pour tout réel x, $1 + x \leq e^x$.
   Posons $f : x \longmapsto 1 + x - e^x$, définie sur $\mathbb{R}$.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f'(x) = 1 - e^x$$

Or :

$$\begin{array}{rcl} 1 - e^x > 0 & \iff & 1 > e^x \\ & \iff & 0 > x \end{array} \quad \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+$$

D'où :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 0$$

Conclusion : pour tout réel x, $1 + x \leq e^x$.

3.b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \displaystyle\prod_{k=0}^{n} e^{a^k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, d'après la question précédente :

$$\forall k_i n[\![0;n]\!],\ 1 + a^k \leq e^{a^k}$$

De plus, puisque $a > 0$, on a : $\forall k \in [\![0;n]\!],\ 1 + a^k > 0$.
Ainsi :

$$\forall k \in [\![0;n]\!],\ 0 \leq 1 + a^k \leq e^{a^k}$$

Par conséquent :

$$\prod_{k=0}^{n}(1 + a^k) \leq \prod_{k=0}^{n} e^{a^k}$$

Petite remarque

Si $0 < a < b$ et $0 < c < d$, alors $0 < ac < ad$.
En effet : puisque $c > 0$, on a : $ac < bc$. Et puisque $b > 0$, on a $bc < bd$.
D'où par transitivité :

$$0 < ac < bd$$

Si c'est vrai pour 2, c'est vrai pour n, par récurrence !

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \displaystyle\prod_{k=0}^{n} e^{a^k}$.

3.c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leq e^{\frac{1}{1-a}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n} e^{a^k} &= \exp\left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right) \quad a \neq 1 \\ &= \exp\left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)\end{aligned}$$

Or, $a > 0$, donc :

$$1 - a^{n+1} \leq 1$$

Et $a < 1$, donc $1 - a > 0$, d'où :

$$\frac{1-a^{n+1}}{1-a} \leq \frac{1}{1-a}$$

Puis, en appliquant l'exponentielle, croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\exp\left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right) \leq \exp\left(\frac{1}{1-a}\right)$$

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n \leq e^{\frac{1}{1-a}}$.

3.d. Conclure sur la convergence de (u_n).

D'après la question 2, la suite (u_n) est croissante. Et d'après la question précédente, la suite (u_n) est majorée (par $e^{\frac{1}{1-a}}$).

Important !

La question précédente est nécessaire ! En effet, la question 3.b. ne fournit pas un majorant de la suite (u_n).
On rappelle qu'un majorant de (u_n) ne peut, en aucun cas, dépendre de n !!!

Conclusion : par théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
Et comme (u_n) est bornée par 0 (trivial) et $e^{\frac{1}{1-a}}$, on a : $\ell \in \left[0; e^{\frac{1}{1-a}}\right]$.

4. Si $a \geq 1$.

4.a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2^{n+1}$. ă

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Puisque $a \geq 1$, on a :

$$\forall k \in [\![0;n]\!],\ 1 + a^k \geq 2$$

D'où, par produit de facteurs positifs :

$$\prod_{k=0}^{n}(1 + a^k) \geq \prod_{k=0}^{n} 2$$

Autrement dit :

$$u_n \geq 2^{n+1}$$

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2^{n+1}$.

4.b. Conclure sur le comportement en l'infini de (u_n).

D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 2^{n+1}$$

Or : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 2^{n+1} = +\infty$.
Par théorème de comparaison, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Conclusion : la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

●●○○ Exercice 12 - Suites imbriquées

Considérons les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $0 < u_0 < v_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n} \end{cases}$$

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie les valeurs de u_n et v_n.

```python
def suite_uv(n):
    u=float(input("u_0=?"))
    v=float(input("v_0=?"))
    for k in range(1,n+1):
        u,v=u**2/(u+v),v**2/(u+v)
    return u,v
```

2. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies et à valeurs strictement positives.

Par récurrence, démontrons : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n existent, et $u_n > 0$, $v_n > 0$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$: c'est dans l'énoncé.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "u_n et v_n existent, et $u_n > 0$, $v_n > 0$" et montrons "u_{n+1} et v_{n+1} existent, et $u_{n+1} > 0$, $v_{n+1} > 0$.
  - ◇ Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Donc en particulier, $u_n + v_n \neq 0$. Ainsi, u_{n+1} et v_{n+1} existent.
  - ◇ De plus, puisque, par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, on a $u_n + v_n > 0$. Ainsi, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n} > 0$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n} > 0$.

  L'hérédité est établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n existent, et $u_n > 0$, $v_n > 0$.
Autrement dit : les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies et à valeurs strictement positives.

3. Démontrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} \\ &= \frac{(u_n - v_n)(u_n + v_n)}{u_n + v_n} \\ &= u_n - v_n \end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(u_n - v_n)$ est constante (égale à $u_0 - v_0$).

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente : $u_n \leq v_n$ puis $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$.

- D'après la question précédente : $u_n - v_n = u_0 - v_0$. Mais on sait que $v_0 > u_0$, donc :
$$u_n - v_n < 0$$
D'où :
$$u_n \leq v_n$$
- On a ainsi :
$$u_n \leq v_n$$
D'où, en ajoutant u_n :
$$2u_n \leq u_n + v_n$$
Puis, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$, puisque $2u_n > 0$ et $u_n + v_n > 0$, on obtient :
$$\frac{1}{2u_n} \geq \frac{1}{u_n + v_n}$$
Et, en multipliant par $u_n^2 \geq 0$:
$$\frac{u_n^2}{2u_n} \geq \frac{u_n^2}{u_n + v_n}$$
Autrement dit :
$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$.

5. Démontrer alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0$$

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 u_0 = u_0 \geq u_0$: l'initialisation est vérifiée.

♡ **Astuce du chef !** ♡
Quand on souhaite établir une inégalité / un encadrement par récurrence, on démarre les calculs avec l'HDR. Cela permet de bien mettre en évident tous les arguments nécessaires à la manipulation des inégalités, qui sont bien souvent oubliés sinon...

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0$ et montrons $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u_0$.
  Par hypothèse de récurrence, on a :
  $$u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0$$
  En multipliant par $\frac{1}{2} > 0$:
  $$\frac{1}{2} u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u_0$$
  Mais, d'après la question précédente :
  $$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$$
  D'où, par transitivité :
  $$u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u_0$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0$.

6. Montrer que les deux suites convergent et déterminer leur limite respective.

- D'après la question **2.** et la question précédente, on a :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0$$
  Mais $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.
  Ainsi, par théorème d'encadrement, on obtient :
  $$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$
- Or, on sait que :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - u_0 + v_0$$
  Et puisque (u_n) converge vers 0, par opérations, la suite (v_n) converge également et
  $$\lim_{n \to +\infty} v_n = v_0 - u_0$$

Conclusion : la suite (u_n) converge vers 0 et la suite (v_n) converge vers $v_0 - u_0$.

●○○○ Exercice 13 - Suite récurrente d'ordre 1

Considérons la fonction $f : x \longmapsto x^2 e^{-x+1}$ ainsi que la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Créer une fonction Python qui prend un entier $n \in \mathbb{N}$ en argument d'entrée et renvoie la valeur de u_n en sortie.

```python
import numpy as np

def u(n):
    res=2
    for k in range(1,n+1): #ou range(n)
        res=res**2*np.exp(-res+1)
    return res
```

2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; elle est donc également dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x+1} - x^2 e^{-x+1} \\ &= x(2-x)e^{-x+1} \end{aligned}$$

D'où :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	

Petite remarque
Les limites ne sont pas demandées...

3. Démontrer que pour tout $x \in]1;2]$, $f(x) < x$.

- Soit $x \in]1;2]$. Transformons le résultat à établir... On a les équivalences :
  $$\begin{aligned} f(x) < x &\iff x^2 e^{-x+1} < x \\ &\iff xe^{x+1} < 1 \quad \text{car } x > 0 \\ &\iff xe^{-x+1} - 1 < 0 \end{aligned}$$

- Posons alors $g : x \longmapsto xe^{-x+1} - 1$, définie sur $[1;2]$. La fonction g est dérivable sur $[1;2]$ et, pour tout $x \in [1;2]$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-x+1} - xe^{-x+1} \\ &= (1-x)e^{-x+1} \end{aligned}$$

D'où :

x	1	2
$g'(x)$	0 $-$	
g	0 $\searrow$	$-1+2e^{-1}$

Ainsi :

$$\forall x \in]1;2],\ g(x) < 0$$

Autrement dit :

$$\forall x \in]1;2],\ xe^{-x+1} - 1 < 0$$

Des deux points précédents, on déduit :

$$\forall x \in]1;2],\ f(x) < x$$

Conclusion : pour tout $x \in]1;2]$, $f(x) < x$.

4. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  On sait que $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{4}{e}$. Puisque $e \in [2;4]$, on a $\frac{4}{e} \in [1;2]$.
  D'où : $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 2$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$ et montrons que $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 2$.
  Par hypothèse de récurrence, on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$$

Puis, en appliquant f, croissante sur $[1;2]$:

$$f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(2)$$

Or $f(1) = 1$ et $f(2) = \frac{4}{e} < 2$, d'où, par transitivité :

$$1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 2$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$.

5. En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ positif.

D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée (par 1). Ainsi, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ.
Et comme (u_n) est bornée par 1 et 2, on obtient $\ell \in [1;2]$; en particulier, ℓ est positif.

6. Justifier que $f(\ell) = \ell$ puis déterminer la valeur de ℓ.

- On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 e^{-u_n+1}$.
  Or (u_n) converge vers ℓ, ainsi par composition de limites et opérations sur les limites, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^2 e^{-u_n+1} = \ell^2 e^{-\ell+1}$$

Mais également $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. D'où, par unicité de la limite :

$$\ell = \ell^2 e^{-\ell+1}$$

Autrement dit :

$$f(\ell) = \ell$$

- Il ne reste plus qu'à résoudre $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [1;2]$.
  Or, on a vu à la question **3.** que pour tout $x \in]1;2]$, $f(x) < x$; et on a remarqué que $f(1) = 1$. Par conséquent, pour tout $x \in [1;2]$:

$$f(x) = x \iff x = 1$$

Conclusion :

$$\ell = 1$$

Petite remarque
On se place sur $[1;2]$ car on sait que $\ell \in [1;2]$.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers 1.

7. Écrire une fonction Python qui renvoie le plus petit rang à partir duquel $|u_n - \ell| < 10^{-6}$.

```python
def seuil():
    n=0
    while abs(u(n)-1)>=10**(-6):
        n=n+1        #ou n+=1
    return n
```

Petite remarque
Le programme semble tourner un petit moment... Ceci s'explique par la convergence lente de la suite (u_n) vers 1.

●○○○ Exercice 14 - Suite récurrente d'ordre 1

Considérons la fonction $f : x \longmapsto x - \ln(x^2+1) + 1$, définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Écrire une fonction Python qui prend un entier naturel n en argument d'entrée, et renvoie la valeur de u_n.

```python
import numpy as np

def suite_u(n):
    u=0
    for k in range(1,n+1):
        u=u-np.log(u**2+1)+1
    return u
```

2. Dresser le tableau de variations de f.

   - Posons $u : x \longmapsto x^2+1$.
   La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$, donc la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.ă
   Par conséquent, f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\begin{aligned} f'(x) &= 1-\frac{2x}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} \\ &= \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \end{aligned}$$
   D'où :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$\nearrow$

✘ Attention !
On ne dit pas "composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, c'est faux !!

Petite remarque
Les limites de f ne sont pas demandées...

3. Justifier que f admet deux points fixes opposés et les déterminer. *On notera α le point fixe positif.*
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} f(x)=x &\iff x-\ln(x^2+1)+1=x \\ &\iff \ln(x^2+1)=1 \\ &\iff x^2+1=e \quad \text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\ &\iff x^2=e-1 \\ &\iff \begin{cases} x=\sqrt{e-1} \\ \text{ou} \\ x=-\sqrt{e-1} \end{cases} \end{aligned}$$

> **Conclusion :** la fonction f possède deux points fixes opposés : $\sqrt{e-1}$ et $-\sqrt{e-1}$.
> On notera ensuite $\alpha=\sqrt{e-1}$.

4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et bornée par 0 et α.
Par récurrence, démontrons : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

   - **Initialisation.** Pour $n=0$:
   $u_0=0$ et $u_1=1$.
   Or $\alpha=\sqrt{e-1} \geq \sqrt{1}=1$, car $e>2$, donc $e-1>1$.
   On a ainsi :
   $$0 \leq u_0 \leq 1 \leq \alpha$$
   L'initialisation est vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$" et montrons "$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$".
   Par hypothèse de récurrence, on a :
   $$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$$
   En appliquant f, croissante sur $[0;\alpha]$, on obtient :
   $$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha)$$
   Or $f(0)=1$ et α est un point fixe de f, donc $f(\alpha)=\alpha$. D'où :
   $$1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$$
   Par transitivité, on obtient ainsi :
   $$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$$
   L'hérédité est établie

> **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
> Autrement dit : la suite (u_n) est croissante et bornée par 0 et α.

5. En déduire la convergence de la suite (u_n), et préciser sa limite.

   - D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée (par α). Ainsi, par théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
   Et comme (u_n) est bornée par 0 et α, on a $\ell \in [0;\alpha]$.
   - Puisque (u_n) converge vers ℓ, on a aussi :
     - ◇ par opérations et composition sur les limites :
     $$\lim_{n\to+\infty} u_n-\ln(u_n^2+1)+1=\ell-\ln(\ell^2+1)+1=f(\ell)$$
     - ◇ $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$.

   Mais comme on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n-\ln(u_n^2+1)+1$, on obtient, par unicité de la limite :
   $$\ell=f(\ell)$$

- Or, on sait que $\ell \in [0;\alpha]$. Et le seul point fixe de f dans cet intervalle est α.
Par conséquent :
$$\ell = \alpha$$

Conclusion : la suite (u_n) converge vers $\sqrt{e-1}$.

6. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \ln(u_k^2 + 1)\right)$. Établir la convergence de la suite (S_n) et déterminer sa limite.
   - Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) && \text{par linéarité de la somme} \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k && \text{par télescopage} \\ &= u_{n+1} - u_0 \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$
   - Par conséquent, d'après la question précédente :
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \alpha$$

Conclusion : la suite (S_n) converge vers $\sqrt{e-1}$.

•○○○ Exercice 15 - Suite récurrente d'ordre 1

Considérons la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 - 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que (u_n) est croissante et minorée par 3.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3 \leq u_n \leq u_{n+1}$.
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
   $u_0 = 3$ et $u_1 = \dfrac{7}{2}$.
   On a bien : $3 \leq u_0 \leq u_1$. Initialisation vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$3 \leq u_n \leq u_{n+1}$" et montrons "$3 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$".
   Par hypothèse de récurrence, on a :
$$3 \leq u_n \leq u_{n+1}$$
   En appliquant la fonction carrée, croissante sur $\mathbb{R}^+$ (on y est bien...), on obtient :
$$9 \leq u_n^2 \leq u_{n+1}^2$$
   Et, puisque $\dfrac{1}{2} > 0$:
$$\frac{7}{2} \leq \frac{1}{2}u_n^2 - 1 \leq \frac{1}{2}u_{n+1}^2 - 1$$
   Autrement dit :
$$\frac{7}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$$
   Et comme $\dfrac{7}{2} > 3$, par transitivité :
$$3 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$$
   L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3 \leq u_n \leq u_{n+1}$.
Autrement dit : la suite (u_n) est croissante et minorée par 3.

2. *Supposons que (u_n) est majorée.*
   2.a. Que peut-on ainsi en déduire sur la suite (u_n) ?
   D'après la question précédente, la suie (u_n) est croissante.
   Puisqu'elle est supposée majorée, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge alors vers un réel ℓ.
   Et comme (u_n) est minorée par 3, on obtient : $\ell \geq 3$.
   2.b. Déterminer alors la limite de (u_n). Que peut-on alors conclure ?
   - Puisque (u_n) converge vers ℓ, on a aussi :
     - par opérations sur les limites :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}u_n^2 - 1 = \frac{1}{2}\ell^2 - 1$$
     - $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.

   Mais comme on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 - 1$, on obtient, par unicité de la limite :
$$\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - 1$$

✍ **Rédaction**
Il est indispensable de reformuler l'énoncé pour raisonner par récurrence ! La proposition doit être quantifiée universellement sur $\mathbb{N}$ (ou un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, pouvant être fini d'ailleurs...).

Petite remarque
On pourrait se contenter de démontrer que (u_n) est croissante... Elle serait ainsi immédiatement minorée par son premier terme, qui vaut 3.

- Or :

$$\begin{aligned} \ell = \frac{1}{2}\ell^2 - 1 &\iff \ell^2 - 2\ell - 2 = 0 \\ &\iff \begin{cases} \ell = \dfrac{2-\sqrt{12}}{2} \\ \text{ou} \\ \ell = \dfrac{2+\sqrt{12}}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \ell = 1-\sqrt{3} \\ \text{ou} \\ \ell = 1+\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Or : $\sqrt{3} \leq \sqrt{4} = 2$, donc $1+\sqrt{3} < 3$ et $1-\sqrt{3} < 3$. Et comme, à la question précédente, on avait obtenu $\ell \geq 3$, nous arrivons devant une belle absurdité !

Conclusion : l'hypothèse faite en question 2. est fausse ! La suite (u_n) n'est pas majorée.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On sait alors que la suite (u_n) est croissante et non majorée.

Conclusion : par théorème de divergence monotone, (u_n) diverge vers $+\infty$.

●●○○ Exercice 16 - Suite récurrente d'ordre 1

Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} - u_n^2 \end{cases}$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2}{x} - x^2$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur ces intervalles.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2}{x^2} - 2x \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{-2-2x^3}{x^2} \\ &= -2\frac{x^3+1}{x^2} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} x^3 + 1 > 0 &\iff x^3 > -1 \\ &\iff x^3 > (-1)^3 \\ &\iff x > -1 \end{aligned}$$

par stricte croissance de la fonction cube sur $\mathbb{R}$

D'où :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
f		$\nearrow$	-3	$\searrow$	||	$\searrow$	

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \leq -1$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  u_0 existe et $u_0 = 1$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "u_n existe et $u_n \leq -1$" et montrons "u_{n+1} existe et $u_{n+1} \leq -1$".
  - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \leq -1$. En particulier, $u_n \neq 0$.
    Ainsi, $\dfrac{2}{u_n}$ existe et donc u_{n+1} existe.
  - De plus, par hypothèse de récurrence :
    $$u_n \leq -1$$
    Puis, en appliquant la fonction f, croissante sur $]-\infty;-1]$, on obtient :
    $$f(u_n) \leq f(-1)$$
    Or $f(-1) = -3$, d'où, par transitivité :
    $$u_{n+1} \leq -1$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \leq -1$.

Important !
La question de l'existence de chaque terme d'une suite récurrente se pose à chaque fois que la fonction f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.
Ici, il faut en fait s'assurer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

3. Étudier les variations de (u_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{u_n} - u_n^2 - u_n \\ &= \frac{2 - u_n^3 - u_n^2}{u_n} \\ &= -\frac{u_n^3 + u_n^2 - 2}{u_n} \end{aligned}$$

Déterminons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $x^3 + x^2 - 2$.

Remarquons déjà que 1 est racine de $x \longmapsto x^3 + x^2 - 2$... D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^3 + x^2 - 2 = (x-1)(x^2+2x+2)$$

Ainsi :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
x^3+x^2-2	$-$	0	$+$

Or, on sait que $u_n \leq -1$. De plus : $\forall x \leq -1,\ x^3+x^2-2 \leq 0$.
Par conséquent :

$$u_n^3+u_n^2-2 \leq 0$$

Ainsi :

$$-\frac{u_n^3+u_n^2-2}{u_n} \leq 0$$

Conclusion : la suite (u_n) est décroissante.

Petite remarque

On aurait aussi pu démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$. C'est immédiat, en utilisant la croissance de la fonction f dans l'hérédité.

4. En raisonnant par l'absurde, démontrer que la suite (u_n) diverge.
On sait que la suite (u_n) est décroissante. Par conséquent, si on démontre qu'elle est non minorée, le théorème de divergence monotone permettra de conclure que (u_n) diverge vers $-\infty$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite (u_n) est minorée.
Étant décroissante, le théorème de convergence monotone assure alors que (u_n) converge vers un réel ℓ. Puisque (u_n) est majorée par -1, on a même $\ell \leq -1$.
   - Puisque (u_n) converge vers ℓ, on a aussi :
     - par opérations sur les limites, puisque $\ell \neq 0$:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{u_n}-u_n^2 = \frac{2}{\ell}-\ell^2$$
     - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.

     Mais comme on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n}-u_n^2$, on obtient, par unicité de la limite :
$$\ell = \frac{2}{\ell}-\ell^2$$
   - Or :
$$\begin{aligned}
\ell = \frac{2}{\ell}-\ell^2 &\iff \ell-\frac{2}{\ell}+\ell^2 = 0\\
&\iff \frac{\ell^3+\ell^2-2}{\ell} = 0 && \ell \neq 0\\
&\iff \ell^3+\ell^2-2 = 0 && \text{d'après le tableau de signes de la question } \mathbf{3.}\\
&\iff \ell = 1
\end{aligned}$$
     Mais on avait $\ell \leq -1$: absurde !

   Par conséquent, f n'est pas minorée.

   Conclusion : par théorème de divergence monotone, la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

●●○○ Exercice 17 - Suite récurrente d'ordre 1

Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

Justifier que la suite (u_n) est bien définie, puis démontrer qu'elle diverge vers $+\infty$.
Les grandes lignes...

- on démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$
- on en déduit que (u_n) est croissante
- on suppose que (u_n) est majorée... théorème de convergence monotone, unicité de la limite... on trouve que (u_n) converge vers une solution de l'équation $x = x+\dfrac{1}{x}$: équation qui n'a aucune solution !
- (u_n) n'est donc pas majorée, et le théorème de divergence monotone permet de conclure.

●●●○ Exercice 18 - Suite récurrente d'ordre 1 avec fonction décroissante

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Notons également (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et bornée par 0 et 1.
Démontrons pas récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leq u_n \leq 1$.
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
   u_0 existe et $u_0 = 0$: l'initialisation est vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "u_n existe et $0 \leq u_n \leq 1$" et montrons "u_{n+1} existe et $0 \leq u_{n+1} \leq 1$".
     - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \in [0;1]$. En particulier, $u_n \in \mathbb{R}^+$. Donc $f(u_n)$ existe. Autrement dit, u_{n+1} existe.

◇ De plus, par hypothèse de récurrence :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

En appliquant f, décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on obtient :

$$f(0) \geq f(u_n) \geq f(1)$$

or $f(0) = 1$ et $f(1) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, par transitivité :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

L'hérédité est établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leq u_n \leq 1$.
Autrement dit : la suite (u_n) est bien définie et bornée par 0 et 1.

2. Montrer que la fonction f possède un unique point fixe, noté α, et le déterminer.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = x & \iff \frac{1}{1+x} = x & & x \in \mathbb{R}^+\text{, donc } 1+x \neq 0 \\ & \iff 1 = x(1+x) \\ & \iff x^2 + x - 1 = 0 \\ & \iff \begin{cases} x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} & & \text{car } x \in \mathbb{R}^+ \text{ et que } \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \\ & \iff x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : la fonction f possède un unique point fixe : $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Représenter l'allure de la courbe de f ainsi que les premiers termes de la suite (u_n).

4. Démontrer que la suite (u_{2n}) est croissante et majorée par α et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par α.

Par récurrence, démontrons : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq \alpha \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  ◇ $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{1}{2}$ et $u_3 = \dfrac{2}{3}$
  ◇ $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$; or, $\sqrt{5} \in [\sqrt{4}; \sqrt{9}]$, donc $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$

  On a déjà :

  $$u_0 \leq u_2 \leq \alpha$$

  Ensuite, raisonnons par équivalences :

  $$\begin{aligned} \alpha \leq u_3 & \iff \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq \frac{2}{3} \\ & \iff -3+3\sqrt{5} \leq 4 \\ & \iff \sqrt{5} \leq \frac{7}{3} & & \text{stricte croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}^+ \\ & \iff 5 \leq \frac{49}{9} \end{aligned}$$

  Or, on sait que $5 = \dfrac{45}{9} \leq \dfrac{49}{9}$. La dernière inégalité est donc vraie. Par équivalence, on a également $\alpha \leq u_3$.
  D'où :

  $$\alpha \leq u_3 \leq u_1$$

  Par conséquent, on a bien :

  $$u_0 \leq u_2 \leq \alpha \leq u_3 \leq u_1$$

  L'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq \alpha \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$" et montrons "$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \leq \alpha \leq u_{2n+5} \leq u_{2n+3}$". Par hypothèse de récurrence, on a :

  $$u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq \alpha \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$$

  D'où, en appliquant f, décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (tout y est bien, d'après la question **1.**) :

  $$f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2}) \geq f(\alpha) \geq f(u_{2n+3}) \geq f(u_{2n+1})$$

  Or α est le point fixe de f, donc $f(\alpha) = \alpha$. D'où :

  $$u_{2n+1} \geq u_{2n+3} \geq \alpha \geq u_{2n+4} \geq u_{2n+2}$$

  Puis, en réappliquant f, décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (tout y est bien, d'après la question **1.**) :

  $$f(u_{2n+1}) \leq f(u_{2n+3}) \leq f(\alpha) \leq f(u_{2n+4}) \leq f(u_{2n+2})$$

  Ce qui donne :

  $$u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \leq \alpha \leq u_{2n+5} \leq u_{2n+3}$$

  L'hérédité est ainsi établie.

✘ Attention !
On ne se trompe pas en "remplaçant n par $n+1$".

✘ Attention !
Appliquer f permet d'obtenir le terme suivant... Et le terme qui succède à u_{2n}, c'est u_{2n+1}...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq \alpha \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$.
Autrement dit : la suite (u_{2n}) est croissante et majorée par α et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par α.

5. En déduire que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent et déterminer leur limite.

- D'après la question précédente, la suite (u_{2n}) est croissante et majorée par α. Par théorème de convergence monotone, (u_{2n}) converge donc vers un réel ℓ.
  Et comme (u_{2n}) est bornée par 0 (question **1.**) et par α, on a : $\ell \in [0; \alpha]$.

- De même, la suite (u_{2n+1}) converge vers un réel ℓ' et on a $\ell' \in [alpha;1]$.
- Remarquons maintenant que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})\ ;\ u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$$
Ainsi, par opérations sur les limites et unicité de la limite, on obtient :
$$\ell = f \circ f(\ell)\ ;\ \ell' = f \circ f(\ell')$$
- Soit $x \in [0;1]$. On a :
$$\begin{aligned} f \circ f(x) = x &\iff \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = x \\ &\iff \frac{1}{\frac{2+x}{1+x}} = x \\ &\iff \frac{1+x}{2+x} = x && x \in [0;1] \text{ donc } 2+x \neq 0 \\ &\iff 1+x = x(2+x) \\ &\iff x^2+x-1 = 0 && \text{d'après les calculs effectués dans la question } \mathbf{2.} \\ &\iff x = \alpha \end{aligned}$$
- Des deux points précédents, on conclut :
$$\ell = \alpha\ ;\ \ell' = \alpha$$

Conclusion : les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes deux vers α.

6. Conclure sur la convergence de la suite (u_n).

Conclusion : d'après la question précédente et par théorème de recouvrement, la suite (u_n) converge vers $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

●●●○ Exercice 19 - Suite récurrente d'ordre 1 avec fonction décroissante

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{2-x}$, définie sur $[0;2]$, ainsi que la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Démontrer que l'intervalle $[0;2]$ est stable par f.

Soit $x \in [0;2]$. On a ainsi :
$$0 \geq -x \geq -2$$
Puis :
$$2 \geq 2-x \geq 0$$
Et, en appliquant la fonction $\sqrt{.}$, croissante sur $\mathbb{R}^+$:
$$\sqrt{2} \geq \sqrt{2-x} \geq 0$$
Par transitivité, puisque $\sqrt{2} \leq \sqrt{4} = 2$, on obtient :
$$0 \leq f(x) \leq 2$$

Conclusion : on a démontré : $\forall x \in [0;2],\ f(x) \in [0;2]$.
Autrement dit, l'intervalle $[0;2]$ est stable par f.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0;2]$.

Par récurrence...
- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
u_0 existe et $u_0 = 2$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "u_n existe et $u_n \in [0;2]$" et montrons "u_{n+1} existe et $u_{n+1} \in [0;2]$".
  - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \in [0;2]$. Donc u_n appartient à l'ensemble de définition de f. Ainsi : $f(u_n)$ existe.
  Autrement dit, u_{n+1} existe.
  - Également, par hypothèse de récurrence :
  $$u_n \in [0;2]$$
  Ainsi, puisque l'intervalle $[0;2]$ est stable (question précédente), on a :
  $$f(u_n) \in [0;2]$$
  Autrement dit :
  $$u_{n+1} \in [0;2]$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0;2]$.

3. Montrer que la fonction f possède un unique point fixe, noté α, et le déterminer.

Soit $x \in [0;2]$. On a :
$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \sqrt{2-x} = x \\ &\iff 2-x = x^2 && \text{par propriété de la fonction carrée, car } x \in [0;2] \\ &\iff x^2+x-2 = 0 \\ &\iff \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = -2 \end{cases} && \text{car } x \in [0;2] \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

☞ **Rappel...**
On utilise :
$$\forall X, Y \geq 0,\ X^2 = Y^2 \iff X = Y$$
Attention : c'est faux si X et Y sont simplement dans $\mathbb{R}$...

Conclusion : la fonction f possède un unique point fixe : 1.

4. Représenter l'allure de la courbe de f ainsi que les premiers termes de la suite (u_n).

5. Démontrer que la suite (u_{2n+1}) est croissante et majorée par α et que la suite (u_{2n}) est décroissante et minorée par α.

Par récurrence, démontrons : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} \leq u_{2n+3} \leq \alpha \leq u_{2n+2} \leq u_{2n}$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  - $u_0 = 2$, $u_1 = 0$, $u_2 = \sqrt{2}$ et $u_3 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$
  - $\alpha = 1$
  - Puisque $\sqrt{2} > 1$, on a déjà :
  $$\alpha \leq u_2 \leq u_0$$
  - Ensuite, raisonnons par équivalences :
  $$\begin{aligned} u_3 \leq \alpha &\iff \sqrt{2-\sqrt{2}} \leq 1 \\ &\iff 2-\sqrt{2} \leq 1 \quad \text{stricte croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

  Or : $\sqrt{2} > 1$. Donc $2-\sqrt{2} < 1$, d'où : $\sqrt{2-\sqrt{2}} < 1$. Donc, par équivalence :
  $$u_3 \leq \alpha$$
  .
  D'où :
  $$u_1 \leq u_3 \leq \alpha$$

  Par conséquent, on a bien :
  $$u_1 \leq u_3 \leq \alpha \leq u_2 \leq u_0$$
  L'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$u_{2n+1} \leq u_{2n+3} \leq \alpha \leq u_{2n+2} \leq u_{2n}$" et montrons "$u_{2n+3} \leq u_{2n+5} \leq \alpha \leq u_{2n+4} \leq u_{2n+2}$". Par hypothèse de récurrence, on a :
  $$u_{2n+1} \leq u_{2n+3} \leq \alpha \leq u_{2n+2} \leq u_{2n}$$
  D'où, en appliquant f, décroissante sur $[0;2]$ (tout y est bien, d'après la question 2.) :
  $$f(u_{2n+1}) \geq f(u_{2n+3}) \geq f(\alpha) \geq f(u_{2n+2}) \geq f(u_{2n})$$
  Or α est le point fixe de f, donc $f(\alpha) = \alpha$. D'où :
  $$u_{2n+2} \geq u_{2n+4} \geq \alpha \geq u_{2n+3} \geq u_{2n+1}$$
  Puis, en réappliquant f, décroissante sur $[0;2]+$ (tout y est bien, d'après la question 2.) :
  $$f(u_{2n+2}) \leq f(u_{2n+4}) \leq f(\alpha) \leq f(u_{2n+3}) \leq f(u_{2n+1})$$
  Ce qui donne :
  $$u_{2n+3} \leq u_{2n+5} \leq \alpha \leq u_{2n+4} \leq u_{2n+2}$$
  L'hérédité est ainsi établie.

> ✘ **Attention !**
> On ne se trompe pas en "remplaçant n par $n+1$".

> ✘ **Attention !**
> Appliquer f permet d'obtenir le terme suivant... Et le terme qui succède à u_{2n}, c'est u_{2n+1}...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} \leq u_{2n+3} \leq \alpha \leq u_{2n+2} \leq u_{2n}$.
Autrement dit : la suite (u_{2n+1}) est croissante et majorée par α et que la suite (u_{2n}) est décroissante et minorée par α.

6. En déduire que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes ; puis donner une équation vérifiée par leurs limites. Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} \in [1;\sqrt{2}]$.

- D'après la question précédente, la suite (u_{2n+1}) est croissante et majorée par α. Par théorème de convergence monotone, (u_{2n+1}) converge donc vers un réel ℓ.
  Et comme (u_{2n+1}) est bornée par 0 (question 1.) et par α, on a : $\ell \in [0;1]$.
- De même, la suite (u_{2n}) converge vers un réel ℓ' et on a $\ell' \in [1;2]$. Et puisque $u_2 = \sqrt{2}$ et que la suite (u_{2n}) est décroissante, on a même $\ell' \in [0;\sqrt{2}]$.
- Remarquons maintenant que :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) \ ; \ u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$$
  Ainsi, par opérations sur les limites et unicité de la limite, on obtient :
  $$\ell = f \circ f(\ell) \ ; \ \ell' = f \circ f(\ell')$$

> ✘ **Attention !**
> Ces deux limites ne sont pas nécessairement égales : il se pourrait que l'équation $f \circ f(x) = x$ possède deux solutions distinctes...

Conclusion : les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent chacune vers une solution de l'équation $f \circ f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0;\sqrt{2}]$.

7. Résoudre l'équation $f \circ f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0;\sqrt{2}]$.

Soit $x \in [0;\sqrt{2}]$. On a :

$$\begin{aligned} f \circ f(x) = x &\iff \sqrt{2-\sqrt{2-x}} = x \\ &\iff 2-\sqrt{2-x} = x^2 \quad \text{par propriété de la fonction carrée, car } x \in [0;\sqrt{2}] \\ &\iff 2-x^2 = \sqrt{2-x} \\ &\iff (2-x^2)^2 = 2-x \quad \text{par propriété de la fonction carrée, car } x \in [0;\sqrt{2}], \text{ donc } 2-x^2 \geq 0 \\ &\iff 4-4x^2+x^4 = 2-x \\ &\iff x^4-4x^2+x+2 = 0 \\ &\iff (x-1)(x^3+x^2-3x-2) = 0 \quad \text{car 1 est racine de } x \longmapsto x^4-4x^2+x+2 \\ &\iff (x-1)(x+2)(x^2-x-1) = 0 \quad \text{car } -2 \text{ est racine de } x \longmapsto x^3+x^2-3x-2 \\ &\iff \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = -2 \end{cases} \quad \text{car } x \in [0;\sqrt{2}] \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

> ☞ **Rappel...**
> On utilise :
> $\forall X, Y \geq 0,\ X^2 = Y^2 \iff X = Y$
> Attention : c'est faux si X et Y sont simplement dans $\mathbb{R}$...

8. Conclure sur la convergence des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) puis sur la convergence de (u_n).
D'après les deux questions précédentes, on conclut que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes deux vers 1.

Conclusion : par théorème de recouvrement, la suite (u_n) converge vers 1.

●●○○ Exercice 20 - Le nombre d'or

Définition 1 - Nombre d'or

Soient $a, b \in \mathbb{R}_*^+$. Le nombre d'or est l'unique rapport $\frac{a}{b}$ tel que $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.

1. Déterminer la valeur du nombre d'or, noté φ.
Soient $a, b \in \mathbb{R}_*^+$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} &\iff 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} && \text{en notant } \varphi = \frac{a}{b}\\
&\iff 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi && \text{car } a \neq 0\text{, donc } \varphi \neq 0\\
&\iff \varphi + 1 = \varphi^2\\
&\iff \varphi^2 - \varphi - 1 = 0\\
&\iff \begin{cases} \varphi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} && \text{car } \varphi > 0\\
&\iff \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : le nombre d'or est égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$.

2.a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq u_n \leq \varphi$.
Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:
On a $u_1 = 1$ et $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \geq \frac{1+\sqrt{4}}{2} = \frac{3}{2} \geq 1$. L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons "$1 \leq u_n \leq \varphi$" et montrons "$1 \leq u_{n+1} \leq \varphi$".
Par hypothèse de récurrence :
$$1 \leq u_n \leq \varphi$$
D'où :
$$2 \leq 1 + u_n \leq 1 + \varphi$$
Puis, par croissance de $\sqrt{.}$ sur $\mathbb{R}^+$, tous les membres étant positifs, on obtient :
$$\sqrt{2} \leq \sqrt{1+u_n} \leq \sqrt{1+\varphi}$$
Par transitivité, on obtient :
$$0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{1+\varphi}$$
Or, d'après les calculs effectués à la question précédente, on avait $\varphi^2 = 1 + \varphi$. Et ainsi, puisque $\varphi \geq 0$, on a : $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$. On obtient alors :
$$0 \leq u_{n+1} \leq \varphi$$
L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq u_n \leq \varphi$.

2.b. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis en déduire qu'elle converge vers φ.

- Par récurrence, on démontrer rapidement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
- Étant majorée (par φ), le théorème de convergence monotone permet d'obtenir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers un réel ℓ.
Et puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée par 1 et φ, on a $\ell \in [1;\varphi]$.
- Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, on a aussi :
  - par opérations sur les limites et composition :
  $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\ell}$$
  - $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.

  Mais comme on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, on obtient, par unicité de la limite :
  $$\ell = \sqrt{1+\ell}$$
- Or :
$$\ell = \sqrt{1+\ell} \iff \ell = \varphi$$
D'où : $\ell = \varphi$.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers φ.

2.c. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\varphi - u_n)$$

puis en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi - u_{n+1} &= \varphi - \sqrt{1+u_n} && \varphi > 0, \text{ donc } \varphi + \sqrt{1+u_n} \neq 0 \\
&= \frac{(\varphi - \sqrt{1+u_n})(\varphi + \sqrt{1+u_n})}{\varphi + \sqrt{1+u_n}} \\
&= \frac{\varphi^2 - (1+u_n)}{\varphi + \sqrt{1+u_n}} && \text{d'après les calculs de la question 1. : } \varphi^2 = 1+\varphi \\
&= \frac{1+\varphi-(1+u_n)}{\varphi + \sqrt{1+u_n}} \\
&= \frac{\varphi - u_n}{\varphi + \sqrt{1+u_n}}
\end{aligned}$$

Or $u_n \geq 1$. Donc :

$$\varphi + \sqrt{1+u_n} \geq \varphi + \sqrt{2}$$

Et comme $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$ et que $\varphi \geq 1$, on a :

$$\varphi \geq \sqrt{2}$$

Waouh ! C'est magique, on est à Poudlard en fait !!

Par conséquent, par transitivité :

$$\varphi + \sqrt{1+u_n} \geq 2\sqrt{2} \geq 2$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$ (tout y est bien...) :

$$\frac{1}{\varphi + \sqrt{1+u_n}} \leq \frac{1}{2}$$

Et comme $\varphi - u_n \geq 0$ (question 2.a.), on obtient :

$$\frac{\varphi - u_n}{\varphi + \sqrt{1+u_n}} \leq \frac{\varphi - u_n}{2}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\varphi - u_n)$

- Par récurrence...
  - **Initialisation.** Pour $n = 1$:
    $\frac{1}{2^{1-1}} = 1$.
    Et $\varphi - u_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq \frac{\sqrt{9}-1}{2} = 1$
    D'où :
    $$\varphi - u_1 \leq \frac{1}{2^{1-1}}$$
    L'initialisation est ainsi vérifiée.
  - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$\varphi - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$" et montrons "$\varphi - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$".
    Par hypothèse de récurrence, on a :
    $$\varphi - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$
    D'où, puisque $\frac{1}{2} > 0$:
    $$\frac{1}{2}(\varphi - u_n) \leq \frac{1}{2^n}$$
    Or, d'après le point précédent :
    $$\varphi - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\varphi - u_n)$$
    Par transitivité, on obtient ainsi :
    $$\varphi - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$$
    L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

2.d. Retrouver alors la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis déterminer un rang à partir duquel u_n est proche de φ à 10^{-10} près.

- D'après la question précédente et la question 2.a., on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \varphi - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$$

Donc, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} (\varphi - u_n) = 0$$

Conclusion : on retrouve la convergence de (u_n) vers φ.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'encadrement ci-dessus, pour que u_n soit proche de φ à 10^{-10} près, il **suffit** que $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-10}$. Or :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-10} \quad & \iff \quad 2^{n-1} \geq 10^{10} \\ & \iff \quad (n-1)\ln(2) \geq 10\ln(10) \quad \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \\ & \iff \quad n \geq \frac{10\ln(10)}{\ln(2)} + 1 \quad \text{car } \ln(2) > 0\end{aligned}$$

Posons donc $N = \left\lfloor \dfrac{10\ln(10)}{\ln(2)} + 1 \right\rfloor + 1$. D'après ce qui précède, on a bien :

$$\forall n \in [\![N; +\infty[\![, \; 0 \leq \varphi - u_n \leq 10^{-10}$$

Conclusion : à partir du rang $\left\lfloor \dfrac{10\ln(10)}{\ln(2)} + 1 \right\rfloor + 1$, il est certain que u_n est une valeur approchée de φ à 10^{-10} près.

★Subtile...★

Puisque ce rang est obtenu après majoration de l'écart entre φ et u_n, il est possible que u_n soit proche de φ à 10^{-10} près avant le rang trouvé...
En fait, on a : $\left\lfloor \dfrac{10\ln(10)}{\ln(2)} + 1 \right\rfloor + 1 = 35$; et pourtant, un rapide programme nous permet d'obtenir que u_n est proche de φ à 10^{-10} près à partir de $n = 21$ déjà.