Exercices du chapitre 10
Limites de suites

●●○○ Exercice 1 - Vrai ou faux ?

1. Si (u_n) est croissante, alors elle est minorée.
2. Si (u_n) est décroissante et converge vers ℓ, alors (u_n) est minorée par ℓ.
3. Si (u_n) est positive et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \dfrac{1}{n^2+1}$, alors (u_n) converge.
4. Si (u_n) est strictement croissante et strictement positive, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
5. (u_n) converge si, et seulement si, $(|u_n|)$ converge.
6. (u_n) converge vers 1 si, et seulement si, $(|u_n|)$ converge vers 1.
7. Si (u_n) est bornée, alors elle converge.
8. Si (u_n) est convergente, alors elle est bornée.
9. Si la suite $(u_n - v_n)$ possède une limite, alors les suites (u_n) et (v_n) également.
10. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, alors (u_n) est convergente.
11. Si (u_n) et (v_n) ont la même limite, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.
12. Si (u_n) converge, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
13. Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors elle est croissante à partir d'un certain rang.

●○○○ Exercice 2 - Calcul de limites

Déterminer la limite de chaque suite dont on donne le terme général :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^2+3}{e^{-n}+1}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^2-n+3}{n+7}$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\ln(n)+n}{e^{-n}}$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{e^n}{2^n}$
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{5^n-e^n}{2^n+3^n}$
6. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\left(e^{1/n}-1\right)$
7. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^3-\ln(n)}{5n^3+2}$
8. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln(n^2+2n+1)-\ln(n^2)$
9. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n+1}+3}$
10. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{3n^2+5n+1}-\sqrt{n^2+2n+5}$
11. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{3n^2+5n+1}-\sqrt{3n^2+2n+1}$

●●●○ Exercice 3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0;1]$ telles que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$.
Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 1$.

●●○○ Exercice 4 - Suite définie par une somme

Considérons la suite $(S_n)_{n\in[\![2;+\infty[\![}$ définie par : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.

1. Calculer S_2 et S_3.
2. Étudier les variations de la suite $(S_n)_{n\in[\![2;+\infty[\![}$.
3. Justifier l'existence de deux réels a et b, à déterminer, tels que pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$:
$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$$
4. En déduire, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, une expression simplifiée de S_n puis la limite de la suite $(S_n)_{n\in[\![2;+\infty[\![}$.

●●●○ Exercice 5 - Suite définie par une somme

Considérons la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k! \geq 2^{k-1}$.
2. En déduire que la suite (S_n) converge vers un réel appartenant à l'intervalle $]2;3]$.

●●○○ Exercice 6 - Suite définie par une somme

Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$.
2. Conclure que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

●●○○ Exercice 7 - Suites définies par une somme

Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \quad ; \quad v_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}$.
2. En déduire que pour pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}} \leq u_n \leq \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}}$.
3. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer la valeur de sa limite.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geq \dfrac{n}{\sqrt{3}}$. En déduire la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

●○○○ Exercice 8 - Qui va le plus vite ?

Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{e^n}{n!}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) est-elle monotone ?
2. Démontrer que la suite est décroissante à partir du rang 2.
3. Montrer que pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$: $u_{n+1} \leq \dfrac{e}{3} u_n$.
4. En déduire que pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$: $u_n \leq \left(\dfrac{e}{3}\right)^{n-2} u_2$.
5. Qui tend plus vite vers $+\infty$ entre e^n et $n!$?

●●○○ Exercice 9 - Suites adjacentes

Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Que peut-on en conclure ?
2. Écrire un programme Python qui détermine et affiche le plus petit entier n à partir duquel $|u_n - v_n| < 10^{-5}$.

●●○○ Exercice 10 - Suites adjacentes

Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. Que peut-on en conclure ?

●●●○ Exercice 11 - Suite définie par un produit

Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + a^k)$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2 dans les cas où $a = \dfrac{1}{2}$ et $a = 2$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   Pour la suite de l'étude, nous allons distinguer deux cas.
3. **Si $0 < a < 1$.**
   - **3.a.** Démontrer que pour tout réel x, $1 + x \leq e^x$.
   - **3.b.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \displaystyle\prod_{k=0}^{n} e^{a^k}$.
   - **3.c.** En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leq e^{\frac{1}{1-a}}$.
   - **3.d.** Conclure sur la convergence de (u_n).

4. **Si $a \geq 1$.**
   - 4.a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2^{n+1}$. ă
   - 4.b. Conclure sur le comportement en l'infini de (u_n).

●●○○ Exercice 12 - Suites imbriquées

Considérons les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $0 < u_0 < v_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n} \end{cases}$$

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie les valeurs de u_n et v_n.
2. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies et à valeurs strictement positives.
3. Démontrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente : $u_n \leq v_n$ puis $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.
5. Démontrer alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0$$
6. Montrer que les deux suites convergent et déterminer leur limite respective.

●○○○ Exercice 13 - Suite récurrente d'ordre 1

Considérons la fonction $f : x \longmapsto x^2 e^{-x+1}$ ainsi que la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Créer une fonction Python qui prend un entier $n \in \mathbb{N}$ en argument d'entrée et renvoie la valeur de u_n en sortie.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que pour tout $x \in]1;2]$, $f(x) < x$.
4. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$.
5. En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ positif.
6. Justifier que $f(\ell) = \ell$ puis déterminer la valeur de ℓ.
7. Écrire une fonction Python qui renvoie le plus petit rang à partir duquel $|u_n - \ell| < 10^{-6}$.

●○○○ Exercice 14 - Suite récurrente d'ordre 1

Considérons la fonction $f : x \longmapsto x - \ln(x^2+1) + 1$, définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Écrire une fonction Python qui prend un entier naturel n en argument d'entrée, et renvoie la valeur de u_n.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Justifier que f admet deux points fixes opposés et les déterminer. *On notera α le point fixe positif.*
4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et bornée par 0 et α.
5. En déduire la convergence de la suite (u_n), et préciser sa limite.
6. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(1 - \ln(u_k^2 + 1)\right)$. Établir la convergence de la suite (S_n) et déterminer sa limite.

●○○○ Exercice 15 - Suite récurrente d'ordre 1

Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n^2 - 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que (u_n) est croissante et minorée par 3.
2. *Supposons que (u_n) est majorée.*
   - 2.a. Que peut-on ainsi en déduire sur la suite (u_n) ?
   - 2.b. Déterminer alors la limite de (u_n). Que peut-on alors conclure ?
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

●●○○ Exercice 16 - Suite récurrente d'ordre 1

Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} - u_n^2 \end{cases}$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \longmapsto \frac{2}{x} - x^2$, définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \leq -1$.
3. Étudier les variations de (u_n).
4. En raisonnant par l'absurde, démontrer que la suite (u_n) diverge.

●●○○ Exercice 17 - Suite récurrente d'ordre 1

Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

Justifier que la suite (u_n) est bien définie, puis démontrer qu'elle diverge vers $+\infty$.

●●●○ Exercice 18 - Suite récurrente d'ordre 1 avec fonction décroissante

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = \frac{1}{1+x}$. Notons également (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et bornée par 0 et 1.
2. Montrer que la fonction f possède un unique point fixe, noté α, et le déterminer.
3. Représenter l'allure de la courbe de f ainsi que les premiers termes de la suite (u_n).
4. Démontrer que la suite (u_{2n}) est croissante et majorée par α et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par α.
5. En déduire que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent et déterminer leur limite.
6. Conclure sur la convergence de la suite (u_n).

●●●○ Exercice 19 - Suite récurrente d'ordre 1 avec fonction décroissante

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{2-x}$, définie sur $[0;2]$, ainsi que la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Démontrer que l'intervalle $[0;2]$ est stable par f.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0;2]$.
3. Montrer que la fonction f possède un unique point fixe, noté α, et le déterminer.
4. Représenter l'allure de la courbe de f ainsi que les premiers termes de la suite (u_n).
5. Démontrer que la suite (u_{2n+1}) est croissante et majorée par α et que la suite (u_{2n}) est décroissante et minorée par α.
6. En déduire que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes ; puis donner une équation vérifiée par leurs limites. Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} \in [1;\sqrt{2}]$.
7. Résoudre l'équation $f \circ f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0;\sqrt{2}]$.
8. Conclure sur la convergence des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) puis sur la convergence de (u_n).

●●○○ Exercice 20 - Le nombre d'or

Définition 1 - Nombre d'or

Soient $a, b \in \mathbb{R}_*^+$. Le nombre d'or est l'unique rapport $\frac{a}{b}$ tel que $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.

1. Déterminer la valeur du nombre d'or, noté φ.
2. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$.
   - 2.a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq u_n \leq \varphi$.
   - 2.b. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis en déduire qu'elle converge vers φ.
   - 2.c. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\varphi - u_n)$$

puis en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

   - 2.d. Retrouver alors la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis déterminer un rang à partir duquel u_n est proche de φ à 10^{-10} près.