

●○○○ EXERCICE 1 - ÉCRITURE DE MATRICES

1. Expliciter les matrices suivantes :

$$A = (i + j)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}} \quad ; \quad B = (i^j)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 4}}$$

2. Écrire de façon compacte les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

●○○○ EXERCICE 2 - OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Si possible, calculer : $A + B$, $2A$, $-5D$, $A + C$, AB , AC , AD , A^2 , C^2 , D^2 .

●○○○ EXERCICE 3 - POLYNÔME ANNULATEUR ET INVERSIBILITÉ

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Notons $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^2 + A$. En déduire que A est inversible puis calculer son inverse.

2. Notons $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exprimer A^2 comme une combinaison linéaire de A et I_3 . En déduire que A est inversible puis calculer son inverse.

3. Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^3 - A^2 - A$. En déduire que A est inversible puis exprimer son inverse en fonction de A .

4. Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$. En déduire que A n'est pas inversible.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 3A + 2I_n = 0_n$, $A \neq I_n$ et $A \neq 2I_n$.

5.a. Factoriser le polynôme $X^2 - 3X + 2$.

5.b. En raisonnant par l'absurde, démontrer que $A - I_n$ et $A - 2I_n$ ne sont pas inversibles.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A - 2I_n)^3 = 0_n$ avec $A \neq 2I_n$.

6.a. Justifier que $A - 2I_n$ n'est pas inversible.

6.b. Démontrer que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A .

●○○○ EXERCICE 4 - POLYNÔME ANNULATEUR ET INVERSIBILITÉ

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A = I_n$. Montrer que $A^2 + A + I_n$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A .

●○○○ EXERCICE 5 - CALCUL D'INVERSE

Dans chaque cas, étudier l'inversibilité de la matrice M et, le cas échéant, déterminer son inverse.

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. $M = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

4. $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$5. M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6. M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$7. M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8. M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$9. M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$10. M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$11. M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

•••• EXERCICE 6 - INVERSIBILITÉ

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles que A est inversible. Montrer que B est inversible si, et seulement si, AB est inversible.

•••• EXERCICE 7 - ALGORITHME DU PIVOT DE GAUSS

Interpréter chaque opération élémentaire sur les lignes comme un produit matriciel.

Plus précisément :

- traduire l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ par une multiplication matricielle par la gauche ;
- traduire l'opération $L_i \leftarrow aL_i$ (avec $a \neq 0$) par une multiplication matricielle par la gauche ;
- traduire l'opération $L_i \leftarrow aL_j + bL_i$ (avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$) par une multiplication matricielle par la gauche.

•••• EXERCICE 8 - RÉDUITES DE GAUSS D'UNE MATRICE

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on appelle **réduite de Gauss de A** toute matrice triangulaire obtenue en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de A.

On pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent.

1. Démontrer que si A est inversible, alors toutes ses réduites de Gauss sont inversibles.
2. Démontrer que si une réduite de Gauss de A est inversible, alors A est inversible.
3. Que peut-on dire si A possède une réduite de Gauss non inversible ?

Les exercices 9 à 14 abordent chacun une méthode différente pour déterminer les puissances d'une matrice dans des cas particuliers. D'autres méthodes peuvent être utilisées ponctuellement dans des exercices, mais ce sont les plus courantes.

•••• EXERCICE 9 - CONJECTURE & RÉCURRENCE...

Dans chaque cas, conjecturer une formule pour A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et démontrer cette conjecture par récurrence. L'expression trouvée est-elle encore valable quand $n = 0$?

$$1. A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

•••• EXERCICE 10 - PAR DIAGONALISATION...

Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $P^{-1}AP$. On notera D la matrice obtenue.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

•••• EXERCICE 11 - DÉCOMPOSITION DE LA FORME $\lambda I_n + N$, AVEC N NILPOTENTE.

Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le réel λ et la matrice N de sorte que $A = \lambda I_3 + N$ et que N soit triangulaire avec des coefficients diagonaux nuls.
2. Calculer N^2, N^3 puis N^k pour tout $k \in \llbracket 3; +\infty \llbracket$.
3. En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

●●● EXERCICE 12 - DIVISION EUCLIDIENNE DE X^n PAR UN POLYNÔME ANNULATEUR.

Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Vérifier que le polynôme $X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de A.
- Déterminer les racines de $X^2 - 3X + 2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On admet qu'il existe deux uniques polynômes $Q_n(X)$ et $R_n(X)$ tels que $X^n = Q_n(X) \times (X^2 - 3X + 2) + R_n(X)$ avec $\deg(R_n) < \deg(X^2 - 3X + 2)$.
 - Déterminer le polynôme $R_n(X)$.
 - En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n .

●●● EXERCICE 13 - A L'AIDE DE SUITES...

Considérons $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- Démontrer que toute puissance d'une matrice symétrique est encore une matrice symétrique.
- Démontrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) , que l'on définira, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$$

- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N} : s_n = a_n + b_n$ et $d_n = a_n - b_n$. Déterminer les termes généraux des suites (s_n) et (d_n) .
- En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n .

●●● EXERCICE 14 - A L'AIDE DE SUITES...

Considérons $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 puis déterminer les deux réels x et y de sorte que $A^2 = xA + yI_3$.
- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels x_n et y_n tels que $A^n = x_n A + y_n I_3$.
- Donner les valeurs x_0, y_0, x_1 et y_1 puis établir : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = \frac{3}{4}x_{n+1} + \frac{1}{4}x_n$.
- En déduire les termes généraux des suites (x_n) et (y_n) .
- Conclure sur l'expression de A^n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.

●●● EXERCICE 15 - SUITES IMBRIQUÉES...

Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N} :$

$$\begin{cases} u_{n+1} = -5u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 6u_n - 2v_n \end{cases}$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

- Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
- Écrire une fonction Python qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et renvoie la matrice X_n en sortie.
- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.
- Le but des questions ci-dessous est d'exprimer A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et donner P^{-1} .
 - Calculer $P^{-1}AP$. On notera D la matrice obtenue.
 - Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$ puis en déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- En déduire les termes généraux de (u_n) et (v_n) .

●●● EXERCICE 16 - SUITES IMBRIQUÉES

Considérons les suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ telles que : $a_0 = 1, b_0 = 2, c_0 = 7$ et pour tout entier naturel $n :$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

Déterminer les termes généraux des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) .

●●● EXERCICE 17 - SUITE RÉCURRENTÉ LINÉAIRE D'ORDRE 3...

Considérons la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 ; u_1 = 1 ; u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$. La suite de l'exercice consisterait à déterminer l'expression de A^n ...

●●● EXERCICE 18 - TYPE CONCOURS

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - A$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et I_2 .
3. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
4. Calculer $P^{-1}AP$. On notera D la matrice obtenue.
5. Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n . L'expression trouvée est-elle encore valable pour $n = -1$?

On considère maintenant la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{2} ; u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n + 3 \end{cases}$$

7. Calculer u_2 et u_3 .
 8. Écrire une fonction Python prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant en sortie la valeur de u_n .
- On pose $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n , $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

9. 9.a. Vérifier que pour tout entier naturel n on a : $X_{n+1} = AX_n + B$.
- 9.b. Résoudre l'équation $AY + B = Y$, d'inconnue $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On notera L la matrice solution obtenue.
- 9.c. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$X_n = A^n(X_0 - L) + L$$

10. Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = \frac{3}{10}(3^n - (-2)^n) - \frac{1}{2}$$

•••• EXERCICE 19 - TYPE CONCOURS

On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes : $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Résoudre l'équation $AX = X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Vérifier que P est inversible et déterminer son inverse.
3. Vérifier que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. On notera D cette matrice diagonale.
4. Calculer la matrice $\Delta = P^{-1}BP$ et vérifier qu'elle est diagonale.
5. On se propose de calculer les matrices X_n définies par :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n$$

Écrire une fonction Python qui prend un entier naturel n en argument d'entrée et renvoie la matrice X_n en sortie.

6. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Y_n = P^{-1}X_n$ et on pose également $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
 - 6.a. Calculer Y_0 et Y_1 ; puis montrer que pour tout entier naturel n , $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.
 - 6.b. Montrer alors que pour tout entier naturel n :
$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} \\ v_{n+2} = 4v_n \\ w_{n+2} = -4w_{n+1} - 4w_n \end{cases}$$
 En déduire les termes généraux des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .
 - 6.c. Donner finalement la matrice X_n en fonction de n .

•••• EXERCICE 20 - TYPE CONCOURS

Pour tout réel a , on définit la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la ou les valeurs de c pour lesquelles $M(c) = I_2$.
2. Démontrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $M(a)M(b) = M(a+b-2ab)$.
3. On suppose $a \neq \frac{1}{2}$. Montrer alors que la matrice $M(a)$ est inversible et exprimer en fonction de a le réel b tel que $M(b) = M(a)^{-1}$. La matrice $M(1/2)$ est-elle inversible ?
4. Déterminer l'unique réel non nul a_0 tel que $M(a_0)^2 = M(a_0)$.

5. On considère maintenant les matrices $P = M(a_0)$ et $Q = I_2 - P$.
- Calculer P^2 , PQ , QP et Q^2 (on donnera les résultats en fonction des matrices P et Q ou de la matrice nulle).
 - Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le réel α tel que $M(a) = P + \alpha Q$.
 - En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $(M(a))^n$ en fonction de P , Q , α et n .
 - Expliciter la matrice $(M(a))^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

••• EXERCICE 21 - TYPE CONCOURS

Considérons $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Déterminer les réels λ de sorte que la matrice $A - \lambda I_2$ ne soit pas inversible.
- Résoudre l'équation $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
- Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et donner sa matrice inverse.
- Calculer $P^{-1}AP$. On notera D la matrice obtenue.
- Soient $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\Delta = P^{-1}MP$. Établir :

$$M^2 = A \iff \Delta^2 = D$$
- 6.a. Soit Δ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^2 = D$. Démontrer que Δ et D commutent et en déduire que Δ est une matrice diagonale.
- 6.b. Résoudre finalement l'équation $\Delta^2 = D$, d'inconnue $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Déterminer toutes les solutions de l'équation $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

••• EXERCICE 22 - COMMUTANT

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / AM = MA\}$.

••• EXERCICE 23 - MATRICES NILPOTENTES...

DÉFINITION 1 - MATRICE NILPOTENTE

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est nilpotente lorsqu'il existe un entier k tel que $A^k = 0_n$.

- Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes. En déduire que la somme de deux matrices nilpotentes n'est pas toujours nilpotente.
- On suppose désormais que A et B sont deux matrices nilpotentes qui commutent entre elles. Montrer alors que AB et $A+B$ sont nilpotentes.

••• EXERCICE 24 - MATRICES SYMÉTRIQUES ET ANTI-SYMÉTRIQUES

Soit $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **anti-symétrique** lorsque ${}^tA = -A$.

- Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
 - $M = A + B$,
 - A est symétrique,
 - B est anti-symétrique.

Démontrer que $A = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $B = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

- En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

••• EXERCICE 25 - TRACE D'UNE MATRICE

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **trace de A** , notée $\text{tr}(A)$, le nombre $\sum_{k=1}^n a_{k,k}$.

- Que valent $\text{tr}(I_n)$ et $\text{tr}(0_n)$?
- Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - Démontrer que $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2$.
 - Retrouver alors la caractérisation de l'inversibilité de A avec le déterminant.
- Démontrer que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)$.
- Démontrer que pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- En déduire que l'équation $AB - BA = I_n$, d'inconnues $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, n'a aucune solution.

••• EXERCICE 26 - PRODUIT DE MATRICES STOCHASTIQUES

DÉFINITION 2 - MATRICE STOCHASTIQUE

On dit qu'une matrice carrée est stochastique lorsque ses coefficients sont positifs ou nuls et que la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.