Devoir en temps libre 3
A rendre le mercredi 19 octobre

Exercice 1

Considérons la suite (a_n) définie par $\left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 2a_n + 2^n \end{array}\right.$.

1. Considérons la suite (c_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$.

1.a. Démontrer que (c_n) est arithmétique.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2a_n + 2^n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2} \\ &= c_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : la suite (c_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $c_0 = 0$.

1.b. En déduire le terme général de (a_n).

D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \frac{n}{2}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n2^{n-1}$.

2. **Application au calcul d'une somme.**

2.a. Justifier que pour tout entier naturel k, $a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a, d'après l'énoncé :

$$a_{k+1} = 2a_k + 2^k$$

c'est à dire

$$a_{k+1} - a_k - 2^k = a_k$$

Conclusion : pour tout entier naturel k, $a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k$.

2.b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}$.

C'est un simple télescopage, en utilisant le fait que $a_0 = 0$..

2.c. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} &= \sum_{k=0}^{n} a_k && \text{d'après la question 1.b.} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k - 2^k) && \text{d'après la question 2.a} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) - \sum_{k=0}^{n} 2^k && \text{par linéarité de la somme} \\ &= a_{n+1} - \frac{1 - 2^{n+1}}{1-2} && \text{d'après la question 2.b. et comme } 2 \neq 1 \\ &= (n+1)2^n - 2^{n+1} + 1 \\ &= (n+1)2^n - 2 \times 2^n + 1 \\ &= (n-1)2^n + 1 \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies : Rien de très difficile ni original... Encore une fois, on évite l'abus de raisonnements par équivalences ! Il est souvent mal rédigé (oubli de dire que le point de départ est vrai, donc le point d'arrivée est vrai [ou inversement]) et presque toujours inutile !

●●○○ EXERCICE 2

Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I telle que : $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \in \mathrm{I}$. On considère également la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 \in \mathrm{I}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

> **VOCABULAIRE**
> On dit que l'intervalle I est stable par f lorsque :
> $$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \in \mathrm{I}$$
> *On reste dans* I *en appliquant* f *à un élément de* I.

1. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans I.
   Démontrons par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in \mathrm{I}$.
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
     u_0 existe et d'après l'énoncé, $u_0 \in \mathrm{I}$: l'initialisation est vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que "u_n existe et $u_n \in \mathrm{I}$" et montrons que "u_{n+1} existe et $u_{n+1} \in \mathrm{I}$".
     - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \in \mathrm{I}$. Or f est définie sur I, donc $f(u_n)$ existe.
       Autrement dit, u_{n+1} existe.
     - Également, par hypothèse de récurrence, $u_n \in \mathrm{I}$. Mais, d'après l'énoncé, l'intervalle I est stable par f. Par conséquent :
       $$f(u_n) \in \mathrm{I}$$
       Autrement dit :
       $$u_{n+1} \in \mathrm{I}$$

     L'hérédité est ainsi établie.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in \mathrm{I}$.
   Autrement dit : la suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans I.

> **✘ ATTENTION !**
> Il est indispensable de reformuler la phrase initiale. En effet, la phrase "la suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans I" ne dépend pas de n (n est muet). Pour une démonstration par récurrence, la phrase doit être portée par une quantification universelle en n (débuter par "$\forall n \in \ldots$").
> La reformulation est : "pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in \mathrm{I}$".

2. Le but de la question est d'étudier les variations de la suite (u_n).

   2.a. Que dire si $f(u_0) = u_0$?
   Si $f(u_0) = u_0$, c'est à dire si $u_1 = u_0$, on démontre sans mal, par récurrence, que la suite (u_n) est alors constante.

   2.b. Démontrer que si $f(u_0) > u_0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
   Supposons que $f(u_0) > u_0$. Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$.
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
     D'après l'énoncé, $f(u_0) > u_0$, autrement dit, $u_1 > u_0$: l'initialisation est vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que "$u_n < u_{n+1}$" et montrons que "$u_{n+1} < u_{n+2}$". Par hypothèse de récurrence, on a :
     $$u_n < u_{n+1}$$
     Puis, en appliquant f, strictement croissante sur I, et comme $u_n, u_{n+1} \in \mathrm{I}$ d'après la question **1.**, on obtient :
     $$f(u_n) < f(u_{n+1})$$
     Autrement dit :
     $$u_{n+1} < u_{n+2}$$
     L'hérédité est ainsi établie.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.
   Autrement dit, la suite (u_n) est strictement croissante.

> **♡ ASTUCE DU CHEF ! ♡**
> Quand le but d'une récurrence est d'établir une inégalité ou un encadrement, on démarre les calculs par l'hypothèse de récurrence !

   2.c. Que dire si $f(u_0) < u_0$?
   En procédant comme à la question précédente, on démontre que si $f(u_0) < u_0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

> CQFR
>
> **CE QU'IL FAUT RETENIR DES COPIES :** Il y a eu une erreur de logique sur plusieurs copies à la question 2.b.. On veut démontrer "$\big(f(u_0) > u_0\big) \Longrightarrow \big((u_n)\text{est strictement croissante}\big)$".
> On commence donc par supposer que $f(u_0) > u_0$. Puis on démontrer que (u_n) est strictement croissante ; c'est à dire on démontre (par récurrence ici) : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$.
> En particulier, l'hypothèse "$f(u_0) > u_0$" ne doit pas apparaître dans l'hypothèse de récurrence !!.

●●●○ EXERCICE 3

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \ln(1 + e^x + e^{2x})$ et notons $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan. Justifier que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en déterminer l'équation réduite.

On peut déjà commencer par remarquer que f est définie sur $\mathbb{R}$...
Ensuite, montrer que $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote oblique revient à montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$...

- Une "méthode" consiste à :
  - vérifier qu'il existe un réel a tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$
  - vérifier qu'il existe un réel b tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = b$

  Dans ce cas, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$...

- De façon plus "directe", remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(e^{2x}(e^{-2x}+e^{-x}+1)\right) \\ &= 2x+\ln(e^{-2x}+e^{-x}+1) \end{aligned}$$

De plus, par opérations et compositions de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{-2x}+e^{-x}+1) = 0$.

Conclusion : la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

♡ **Astuce du chef !** ♡

Pour trouver l'idée, on commencer par faire les choses grossièrement...
Pour x suffisamment grand, $e^{2x}+e^x+1 \simeq e^{2x}$. Puis en appliquant ln, on trouve : $\ln(e^{2x}+e^x+1) \simeq \ln(e^{2x})$. C'est à dire : $\ln(e^{2x}+e^x+1) \simeq 2x$. Ne reste plus qu'à faire les choses proprement !

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies : C'est une très bonne idée de chercher $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ pour obtenir la valeur du coefficient directeur de la droite asymptote...
En revanche, il faut avoir deux choses en tête :

- Le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ est finie ne garantit pas l'existence d'une asymptote oblique (exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln'(x) = 0$...).
- On peut démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lambda \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda\right)$, mais ce résultat n'est pas à connaître.

Par conséquent, les choses pourraient se présenter ainsi :

1. Cherchons $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$. On obtient 2 (c'est l'étape de recherche, il n'est pas nécessaire de justifier pourquoi cette idée nous est venue en tête, mais il n'y a, a priori, pas de garantie qu'elle fonctionnera).
2. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x$. On trouve 0. **Conclusion :** la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.