Devoir en temps libre 4
A rendre le mercredi 9 novembre

●●○○ Exercice 1

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ ainsi que la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

Données : $e \simeq 2,7$ et $f(10) \simeq 4,3$

1. Étude de la fonction f.

1.a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, noté $\mathcal{D}_f$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_f &\iff \ln(x) \neq 0 \\ &\iff x > 0 \text{ ET } x \neq 1 \\ &\iff x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathcal{D}_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

> **Petite remarque**
> C'est l'énoncé qui introduit $\mathcal{D}_f$! Vous ne devez donc pas écrire "soit $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f".

1.b. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes de la courbe $\mathcal{C}_f$.

- **En 0 :**
  $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$. Ainsi, par opération sur les limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
- **En 1 par la gauche :**
  $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ln(x) = 0^-$. Ainsi, par opération sur les limites, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$.
- **En 1 par la droite :**
  $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \ln(x) = 0^-$. Ainsi, par opération sur les limites, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$.
- **En $+\infty$:**
  Par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
- La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 1 (gauche et droite).

1.c. On admet que l'on a programmé une fonction `Python` nommée `f`, qui renvoie la valeur de $f(x)$ pour un argument d'entrée x de l'ensemble de définition de f. Voici un programme écrit en `Python` :

```python
import numpy as np
M=input('entrer un nombre strictement positif')
x=np.exp(1)
while f(x) < M:
        x=x+1
print(x)
```

1.c.i. On choisit $\mathrm{M} = 2$. Quelle est alors la valeur affichée à l'issue de l'exécution ?

Puisque $f(e) = e$ et que l'on entre $\mathrm{M} = 2$, la condition $f(x) < \mathrm{M}$ n'est initialement pas vérifiée. La boucle `while` ne tourne donc pas.

Conclusion : la valeur affichée sera une valeur approchée de e.

1.c.ii. On choisit $\mathrm{M} = 1000$. La valeur affichée est alors $9118,72$. Interpréter cette valeur.

Cela signifie que $f(x)$ dépasse 1000 pour la première fois quand $x \simeq 9119$ (à l'unité près).

1.c.iii. Est-on certain que l'algorithme s'arrêtera toujours, pour n'importe quelle valeur de $\mathrm{M} \geq 1000$?

Oui, car la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.

> **Pourquoi ?**
> C'est la définition de limite infinie : pour n'importe quel M, aussi grand que l'on veut, $f(x)$ dépassera toujours M à un moment donné.

1.d. Dresser le tableau de variations complet de f sur son ensemble de définition.

- On a $f = \dfrac{\mathrm{id}}{\ln}$. Les fonctions id et ln sont dérivables sur $]0;1[$ et $]1;+\infty[$, et la fonction ln ne s'annule pas sur ces intervalles ; par conséquent, la fonction f est dérivable sur $]0;1[$ et $]1;+\infty[$.
- Soit $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$. On a :

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2}$$

Or :

$$\begin{aligned} \ln(x) - 1 > 0 &\iff \ln(x) > 1 \\ &\iff x > e \end{aligned}$$

par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$

> **☞ Rappel...**
> $]0;1[\cup]1;+\infty[$ n'est toujours pas un intervalle hein... Il candidate chaque année, mais son adhésion est refusée par le comité de direction des intervalles. Dommage pour lui...

- D'où :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$ 0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

➠Réflexe!
On vérifie la cohérence du tableau! (limites et variations...)

1.e. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Soit $x \in \mathcal{D}_f$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x}{\ln(x)} - x \\ &= \frac{x - x\ln(x)}{\ln(x)} \\ &= \frac{x(1-\ln(x))}{\ln(x)} \end{aligned}$$

Or :

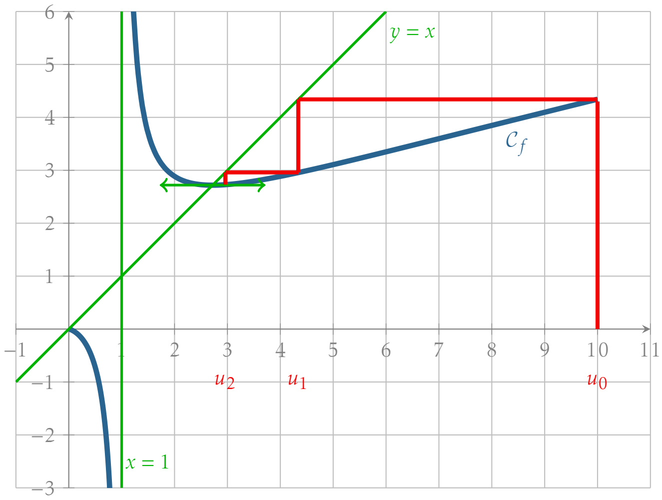
$$\begin{aligned} \ln(x) - 1 > 0 &\iff \ln(x) > 1 \\ &\iff x > e \end{aligned} \quad \text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R}$$

D'où :

x	0		1		e		$+\infty$
x	0	$+$		$+$		$+$	
$1-\ln(x)$	$\|\|$	$+$		$+$	0	$-$	
$\ln(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-x$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Conclusion : la courbe de f est au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $]1; e[$;
la courbe de f est au-dessous de la droite d'équation $y = x$ sur $]0; 1[$ et $]e; +\infty[$;
la courbe de f et la droite d'équation $y = x$ se rencontrent en le point de coordonnées (e, e).

1.f. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi. *On fera apparaître les éventuelles tangentes horizontales et les asymptotes à $\mathcal{C}_f$.*



2. Étude de la suite (u_n).

2.a. Écrire une fonction Python d'en-tête `def suite_u(n):` qui prend un entier naturel n en argument d'entrée et renvoie la valeur de u_n correspondante.

```python
import numpy as np

def suite_u(n):
    u=10
    for k in range(1,n+1):
        u=u/np.log(u)
    return u
```

2.b. Sur le graphique précédent, représenter u_0, u_1 et u_2. *Les valeurs doivent figurer sur l'axe des abscisses.* Quelles conjectures peut-on faire sur la suite (u_n) ?

Conclusion : Conjectures : (u_n) semble décroissante et avoir pour limite le nombre e.

Pourquoi ?
e est l'abscisse du point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et la première bissectrice : c'est le point fixe de f.

2.c. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie, décroissante et minorée par e.

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: "u_n et u_{n+1} existent, et $e \leq u_{n+1} \leq u_n$".

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  - u_0 existe et $u_0 \in \mathcal{D}_f$, donc $f(u_0)$ existe. Autrement dit, u_1 existe.
  - $u_0 = 10$ et $u_1 = f(10) \simeq 4,3$; on a bien $e \leq u_1 \leq u_0$.

  L'initialisation est ainsi vérifiée.

Important !
Il est nécessaire de reformuler la phrase "la suite (u_n) est bien définie, décroissante et minorée par" en une phrase commençant par "$\forall n \in \mathbb{N}$" pour raisonner par récurrence.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que "u_n et u_{n+1} existent, et $e \leq u_{n+1} \leq u_n$" et montrons que "u_{n+2} existe, et $e \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$".
  - Par hypothèse de récurrence, u_n et u_{n+1} existent et appartiennent à $[e;+\infty[$. En particulier, u_n et u_{n+1} sont dans $\mathcal{D}_f$.
    Par conséquent, $f(u_n)$ et $f(u_{n+1}$ existent. Ainsi, u_{n+1} existe (on le savait déjà) et u_{n+2} existe.
  - On a, par hypothèse de récurrence :
    $$e \leq u_{n+1} \leq u_n$$
    En appliquant f, (strictement) croissante sur $[e;+\infty[$, on obtient :
    $$f(e) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$
    Et puisque $f(e) = e$, on a :
    $$e \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

  L'hérédité est ainsi établie.
- **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e \leq u_{n+1} \leq u_n$.

PETITE REMARQUE

Pas utile d'écrire "u_{n+1} existe" dans le résultat à établir, c'est inclus dans l'hypothèse de récurrence...

3. **3.a.** Montrer que pour tout $x \in [e;+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2$.

Aucune difficulté, en développant le membre de droite.

3.b. En déduire que pour tout $x \in [e;+\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

Soit $x \in [e;+\infty[$.

- On sait déjà, d'après la question **1.d.** que $f'(x) \geq 0$. Ainsi : $|f'(x)| = f'(x)$. Il suffit donc de montrer que $f'(x) \leq \frac{1}{4}$.
- D'après la question précédente :
  $$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2$$
  Or :
  $$\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 \geq 0$$
  Par conséquent :
  $$\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$
  Ainsi :
  $$f'(x) \leq \frac{1}{4}$$

Conclusion : pour tout $x \in [e;+\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

REMARQUE

Puisque la question a parfois été traitée autrement, ou du moins le point de départ était différent, voici une autre méthode (plus laborieuse)...

- Commençons par transformer le résultat à établir... On a les équivalences :
  $$\begin{aligned} |f'(x)| \leq \frac{1}{4} &\iff \frac{-1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{4} \\ &\iff \frac{-1}{4} \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \\ &\iff \frac{-1}{2} \leq -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 \leq 0 \\ &\iff 2 \geq \left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$
  d'après la question précédente
- Démontrons alors le dernier encadrement...
  On sait que :
  $$x \geq e$$
  D'où, par croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$:
  $$\ln(x) \geq 1$$
  Puis, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$:
  $$\frac{1}{\ln(x)} \leq 1$$
  D'où :
  $$0 > \frac{-2}{\ln(x)} \geq -2$$
  Et donc :
  $$1 \geq 1 - \frac{2}{\ln(x)} \geq -1$$
  D'où :
  $$0 \leq \left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 \leq 1$$
  Ainsi, par transitivité :
  $$0 \leq \left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 \leq 2$$

PETITE REMARQUE

Il n'est pas utile de poursuivre le travail par équivalences. C'est possible, mais n'oublions pas que la manipulation d'équivalences est toujours plus coûteuse que la manipulation d'implications. On peut donc s'arrêter dès que l'on pense avoir suffisamment simplifié le résultat à établir.

Par équivalences, on a donc démontré :

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$$

Conclusion : pour tout $x \in [e; +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

✘ Attention !
Quand on veut démontrer "$a \leq b$", on ne commence jamais sa rédaction par "$a \leq b$". Que vous a-t-on appris quand on vous demandait de rédiger la réciproque du théorème de Pythagore ??!! Un petit retour en 3ème pourrait faire du bien parfois...

3.c. *On admet ensuite que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|$.*

Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - e| \leq \frac{10}{4^n}$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $|u_0 - e| = |10 - e| = 10 - e$ et $\frac{10}{4^0} = 10$; on a bien $|u_0 - e| \leq \frac{10}{4^0}$.
  L'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $|u_n - e| \leq \frac{10}{4^n}$ et montrons que $|u_{n+1} - e| \leq \frac{10}{4^{n+1}}$.
  On a, par hypothèse de récurrence :
  $$|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$$
  Ainsi, en multipliant par $\frac{1}{4}$:
  $$\frac{1}{4}|u_n - e| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$$
  Et comme on a admis que $|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|$, on en déduit, par transitivité :
  $$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$$
  L'hérédité est ainsi établie.

➟ Réflexe !
Quand on veut établir une inégalité (ou un encadrement) par récurrence, on démarre l'hérédité par l'hypothèse de récurrence ! C'est plus fluide, ça permet de bien mettre en évidence les arguments, sans se tromper !!

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - e| \leq \frac{10}{4^n}$.

3.d. **Question bonus.** Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
On a ainsi établi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |u_n - e| \leq \frac{10}{4^n}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{10}{4^n} = 0$.
Ainsi, par théorème d'encadrement, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n - e| = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n - e = 0$$

Conclusion : la suite (u_n) converge vers e.

3.e. Résoudre l'inéquation $\frac{1}{4^n} < 10^{-4}$ d'inconnue $n \in \mathbb{N}$, puis interpréter le résultat obtenu.

Donnée : $\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 3,32$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4^n} < 10^{-4} &\iff 4^n > 10^4 \\
&\iff n\ln(4) > 4\ln(10) && \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \\
&\iff n > \frac{4\ln(10)}{\ln(4)} && \text{car } \ln(4) > 0 \\
&\iff n > \frac{4\ln(10)}{2\ln(2)} \\
&\iff n > \frac{2\ln(10)}{\ln(2)} \\
&\iff n \geq 7 && \text{car } \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 3,32 \text{ et que } n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

- **Interprétation :** pour tout $n \in [\![7; +\infty[\![$, $\frac{1}{4^n} < 10^{-4}$, et donc (d'après la question précédente), pour tout $n \in [\![7; +\infty[\![$, $|u_n - e| < 10^{-3}$.
  Par conséquent : à partir de $n = 7$, il est certain que u_n est proche de e à 10^{-3} près.

★ Subtile... ★
C'est en fait déjà le cas à partir de $n = 4$; mais il n'est pas possible de le justifier algébriquement (un rapide programme permettrait en revanche de trouver cette valeur). Cette valeur est inférieure à celle trouvée dans l'exercice, puisqu'ici nous sommes passés par une majoration de $|u_n - e|$ pour la trouver ; d'où une "perte d'information".

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies :

- On pense à bien utiliser les questions précédentes... En particulier, la question 1.d. permettait de traiter la question 3.b. simplement.
- ATTENTION : question 3.c.!! Dans l'hérédité, on démarre toujours les calculs par l'hypothèse de récurrence quand il s'agit d'établir une inégalité, je le répète à chaque fois !

L'exercice est à refaire autant que nécessaire jusque ce que tout soit limpide et que la rédaction soit parfaite !

●●●○ Exercice 2

Démontrer :

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty}\left[2-\frac{1}{i};2+\frac{1}{i}\right]=\{2\}$$

Il s'agit de démontrer l'égalité de deux ensembles, raisonnons par double-inclusion.

$\boxed{\supset}$ On a :

$$\forall i\in[\![1;+\infty[\![,\ 2\in\left[2-\frac{1}{i};2+\frac{1}{i}\right]$$

D'où :

$$2\in\bigcap_{i=1}^{+\infty}\left[2-\frac{1}{i};2+\frac{1}{i}\right]$$

Par conséquent :

$$\{2\}\subset\bigcap_{i=1}^{+\infty}\left[2-\frac{1}{i};2+\frac{1}{i}\right]$$

$\boxed{\subset}$ Soit $x\in\bigcap_{i=1}^{+\infty}\left[2-\frac{1}{i};2+\frac{1}{i}\right]$. Nous devons montrer que $x=2$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que $x\neq 2$. Montrons qu'il existe $i\in\mathbb{N}^*$ tel que $x\notin\left[2-\frac{1}{i};2+\frac{1}{i}\right]$.

> **Petite remarque**
> Nous devons contredire l'hypothèse initiale "$x\in\bigcap_{i=1}^{+\infty}\left[2-\frac{1}{i};2+\frac{1}{i}\right]$". Cette hypothèse étant équivalente à "$\forall i\in[\![1;+\infty[\![,\ x\in\left[2-\frac{1}{i};2+\frac{1}{i}\right]$", montrer qu'elle est fausse revient à trouer un entier $i\in\mathbb{N}^*$ tel que $x\notin\left[2-\frac{1}{i};2+\frac{1}{i}\right]$...

- **Si $x>2$:**
  Puisque $x>2$, il s'agit ici de trouver un entier $i\in\mathbb{N}^*$ tel que $x>2+\frac{1}{i}$.
  Soit $i\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} x>2+\frac{1}{i} &\iff x-2>\frac{1}{i} \\ &\iff \frac{1}{x-2}<i && \text{stricte décroissance de } \frac{1}{\cdot} \text{ sur } \mathbb{R}_*^+ \\ &\iff i\geq\left\lfloor\frac{1}{x-2}\right\rfloor+1 && i \text{ est un entier} \end{aligned}$$

  En notant $i_0=\left\lfloor\frac{1}{x-2}\right\rfloor+1$, on a : $x\notin\left[2-\frac{1}{i_0};2+\frac{1}{i_0}\right]$. D'où la contradiction avec le fait que $x\in\bigcap_{i=1}^{+\infty}\left[2-\frac{1}{i};2+\frac{1}{i}\right]$.

- **Si $x<2$:**
  Identique au point précédent.

Dans les deux cas, on obtient une contradiction.
L'hypothèse "$x\neq 2$" est donc fausse. Ainsi :

$$x=2$$

Par conséquent :

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty}\left[2-\frac{1}{i};2+\frac{1}{i}\right]\subset\{2\}$$

Conclusion : $\bigcap_{i=1}^{+\infty}\left[2-\frac{1}{i};2+\frac{1}{i}\right]=\{2\}$.