Devoir en temps libre 4
A rendre le mercredi 9 novembre

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ ainsi que la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

Données : $e \simeq 2{,}7$ et $f(10) \simeq 4{,}3$

1. **Étude de la fonction f.**
   - **1.a.** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, noté $\mathcal{D}_f$.
   - **1.b.** Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes de la courbe $\mathcal{C}_f$.

     Rédaction : On pense à bien détailler les limites...
   - **1.c.** On admet que l'on a programmé une fonction Python nommée `f`, qui renvoie la valeur de $f(x)$ pour un argument d'entrée x de l'ensemble de définition de f. Voici un programme écrit en Python :

```python
import numpy as np
M=input('entrer un nombre strictement positif')
x=np.exp(1)
while f(x) < M:
        x=x+1
print(x)
```

     - **1.c.i.** On choisit $M = 2$. Quelle est alors la valeur affichée à l'issue de l'exécution ?
     - **1.c.ii.** On choisit $M = 1000$. La valeur affichée est alors $9118{,}72$. Interpréter cette valeur.
     - **1.c.iii.** Est-on certain que l'algorithme s'arrêtera toujours, pour n'importe quelle valeur de $M \geq 1000$?
   - **1.d.** Dresser le tableau de variations complet de f sur son ensemble de définition.
   - **1.e.** Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.
   - **1.f.** Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi. *On fera apparaître les éventuelles tangentes horizontales et les asymptotes à $\mathcal{C}_f$.*
2. **Étude de la suite (u_n).**
   - **2.a.** Écrire une fonction Python d'en-tête `def suite_u(n):` qui prend un entier naturel n en argument d'entrée et renvoie la valeur de u_n correspondante.
   - **2.b.** Sur le graphique précédent, représenter u_0, u_1 et u_2. *Les valeurs doivent figurer sur l'axe des abscisses. Les traits de construction seront laissés apparents.* Quelles conjectures peut-on faire sur la suite (u_n) ?
   - **2.c.** Démontrer que la suite (u_n) est bien définie, décroissante et minorée par e.
3. - **3.a.** Montrer que pour tout $x \in [e;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{2}{\ln(x)}\right)^2$.
   - **3.b.** En déduire que pour tout $x \in [e;+\infty[$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$.
   - **3.c.** *On admet ensuite que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - e| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - e|$.*

     Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - e| \leq \dfrac{10}{4^n}$.
   - **3.d.** **Question bonus.** Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
   - **3.e.** Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{4^n} < 10^{-4}$ d'inconnue $n \in \mathbb{N}$, puis interpréter le résultat obtenu.

     Donnée : $\dfrac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 3{,}32$

Exercice 2

Démontrer :

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} \left[2 - \frac{1}{i}; 2 + \frac{1}{i}\right] = \{2\}$$