Les Chartreux

9

Algèbre linéaire

Matrices

Introduction...

Pour commencer, n'oublions pas que l'ordre dans lequel les notions sont enseignées n'est pas l'ordre dans lequel ces notions ont été introduites. Le cas des matrices en est un très bon exemple.
Historiquement, nous devons les premières apparitions de matrices à Cauchy ; mais leur définition et leur étude sont dues à Arthur Cayley (1821-1895, anglais), vers 1845. Il se contentera de l'étude des matrices carrées de petite taille, mais définira les principales notions vues dans ce cours, en affirmant que les notions se généralisent sans difficulté.
A cette époque, les systèmes linéaires ont déjà été étudiés et ont fait naître un nouvel outil : le déterminant, vers 1820. Les matrices arrivent donc peu après et sont utiles à l'étude des applications linéaires entre espaces vectoriels (notions que nous verrons plus tard dans l'année). Les matrices sont donc essentiellement un outil calculatoire, utile en algèbre linéaire.

Sur le choix du vocabulaire...
Matrice vient du mot latin *mater*, qui signifie *mère*. Il apparaît au XIII$^{\text{siècle}}$ pour désigner l'utérus de la femme ; et il désignera ensuite le registre sur lequel les nouveaux-nés étaient enregistrés dès leur naissance. Vous avez dit une sorte de tableau contenant des informations ? Parfait pour désigner la matrice d'une application linéaire, ce tableau contenant les informations essentielles concernant l'application linéaire étudiée...

Pour bien démarrer...

1 # Quel est le nombre réel *neutre* pour l'addition ? Pour la multiplication ?

2 # Comment définir l'inverse (si existence) d'un nombre réel ?

3 # Démontrer que si (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_0, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n$.

4 # Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre le système suivant $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & a \\ -x & + & y & + & z & = & b \\ x & - & y & + & z & = & c \end{array}\right.$ d'inconnu $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Dans tout ce chapitre, n, p, q seront des entiers naturels non nuls.

I Matrice : généralités

Petite remarque — Toujours dans cet ordre : **lignes puis colonnes**. Comme l'ordre alphabétique, mais à l'envers !

Définition 1 - Matrice

Une **matrice** de taille $n \times p$ à coefficients réels est un tableau à n lignes et p colonnes rempli de nombres réels.

- L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice, on note, pour tous $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;p]\!]$, **$a_{i,j}$ le coefficient de A situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne** ; et on écrit : $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.
- On écrira les matrices sous la forme suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & & j^{\text{ème}}\text{ colonne} & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ i^{\text{ème}}\text{ ligne} \rightarrow & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition 2 - Égalité de deux matrices

Deux matrices sont **égales** lorsqu'elles sont de même taille et qu'elles ont les mêmes coefficients.

Quelques "cas particuliers" :

✎ Notation — L'ensemble des matrices carrées de taille n (ou d'ordre n) à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définitions 3 - Matrices particulières

D1# Lorsque $n = p$, on parle de **matrice carrée de taille (ou d'ordre) n**.

D2# Lorsque $n = 1$, on parle de **matrice ligne**. Lorsque $p = 1$, on parle de **matrice colonne**.

D3# Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Lorsque $a_{i,j} = 0$ dès que $i > j$, on dit que A est **triangulaire supérieure**.

D4# Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Lorsque $a_{i,j} = 0$ dès que $i < j$, on dit que A est **triangulaire inférieure**.

D5# Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Lorsque $a_{i,j} = 0$ dès que $i \neq j$, on dit que A est **diagonale**.

D6# La matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients valent 0 est la **matrice nulle de taille $n \times p$**, notée $0_{n,p}$.

D7# La matrice diagonale de taille n dont tous les coefficients diagonaux valent 1 est la **matrice identité de taille n**, notée I_n.

D8# Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Lorsque pour tout $i, j \in [\![1;n]\!]$ $a_{i,j} = a_{j,i}$, on dit que A est **symétrique**.

Exemples 1

II Opérations sur les matrices

II.1 Addition sur les matrices

Définition 4 - Addition interne

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
La **somme de A et B**, notée $A + B$, est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Exemples 2

Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

E1 $A + B =$

E2 $A + C$ n'existe pas car A et C n'ont pas la même taille.

Et voici les propriétés naturelles sur l'addition de matrices :

Propriétés 1

Soient A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

P1# $A + 0_{n,p} = A$ *existence d'un élément neutre*

P2# $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$ *associativité*

P3# Il existe une unique matrice B telle que $A + B = 0_{n,p}$: la matrice $(-a_{i,j})$, notée $-A$. *existence d'un opposé*

P4# $A + B = B + A$ *commutativité*

✘ Attention !
On ne peut additionner / soustraire que des matrices de même taille !

Petite remarque
La propriété P3 permet alors de définir la soustraction sur des matrices : $A - B = A + (-B)$.

★ Démonstration : Aucune difficulté, tout découle des propriétés similaires sur l'addition des réels. ★

II.2 Multiplication des matrices par un réel

Définition 5 - Multiplication externe (ou multiplication scalaire)

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Le **produit de A par** λ, noté $\lambda \cdot A$ (ou λA), est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\lambda \cdot A = (\lambda \times a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Exemple 3

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, alors : $-3 \cdot A =$ et $\frac{1}{2} \cdot A =$

✓ Rigueur !
$\frac{A}{2}$ n'a aucun sens ! On écrit $\frac{1}{2} \cdot A$.

Propriétés 2

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

P1# $0 \cdot A = \lambda \cdot 0_{n,p} = 0_{n,p}$

P2# $1 \cdot A = A$

P3# $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$

P4# $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

★ Démonstration : Là encore, aucune difficulté. ★

II.3 Transposition de matrice

Définition 6 - Matrice transposée

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
La matrice **transposée de A**, notée ${}^tA$, est la matrice $(b_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!] \times [\![1;n]\!], \quad b_{i,j} = a_{j,i}$$

Exemples 4

E1 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA =$

E2 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = A$.

À retenir...
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si, et seulement si, ${}^tA = A$.

E3 Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^t({}^tA) =$

Propriété 3 - Linéarité de la transposition

Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$${}^t(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) = \lambda \cdot {}^tA + \mu \cdot {}^tB$$

☞ **Pour info...**
On dit que l'application transposition est *linéaire*.

Jusque là, tout va bien ! Définitions, addition, soustraction, multiplication scalaire, transposition : tout se passe facilement. Il ne reste plus qu'à réfléchir à la multiplication entre deux matrices !

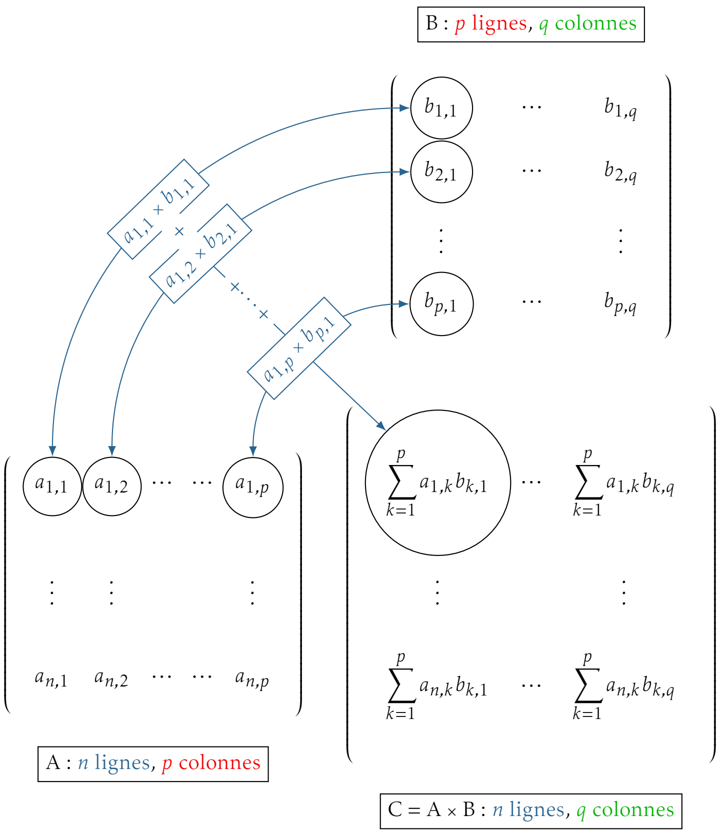
II.4 Multiplication sur les matrices

Définition 7 - Multiplication interne (multiplication matricielle)

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
Le **produit A × B** (ou AB) est la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ définie par :

$$A \times B = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq q}}$$

Il est plus visuel (et donc plus aisé dans un premier temps) de présenter le produit matriciel en écrivant les deux matrices ainsi (la place disponible à droite de A et sous B donne exactement la taille de A × B) :



Complément
Si on note B_i les colonnes de la matrice B, alors les colonnes de la matrice A × B sont les A × B_i.

Exemples 5

E1 Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
S'ils existent, calculer les produits : AB, BA, AC et BC.

✘ **Attention !**
Il se peut que AB existe mais pas BA !

E2 Soient $A = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. **Comparons $A \times B$ et $B \times A$:**

> ✘ **ATTENTION !**
> Si AB et BA existent, ils ne sont *en général* pas égaux : **le produit matriciel n'est pas commutatif !**

> **VOCABULAIRE**
> Lorsque $AB = BA$, on dit que A et B **commutent**.

E3 **Donnons trois matrices A, B, C telles que :**

- les produits $A \times B$ et $B \times C$ existent
- le produit $A \times C$ n'existe pas
- A^2 et C^2 existent mais B^2 n'existe pas

E4 **Donnons deux matrices non nulles A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A \times B = 0$:**

> ✘ **ATTENTION !**
> La *règle du produit nul* n'est pas valable avec le produit matriciel ; et donc en général, $AB = AC$ n'implique pas $B = C$

E5 Soit $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$. On a : $M^tM =$

Les propriétés importantes sur la multiplication de matrices...

PROPRIÉTÉS 4

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient A, B, C trois matrices telles que les produits suivants existent...

- **P1#** $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$ — *associativité*
- **P2#** $A \times I_p = I_n \times A = A$ — *existence d'un élément neutre*
- **P3#** $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ — *distributivités sur l'addition*
- **P4#** $(\lambda \cdot A) \times B = \lambda \cdot (A \times B) = A \times (\lambda \cdot B)$
- **P5#** ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$

★ DÉMONSTRATION : Pénibles à écrire, mais ces démonstrations feraient un bon exercice théorique... ★

En bref, la multiplication sur les matrices n'est pas celle qu'on aurait peut-être aimé au premier coup d'œil... Mais si on a choisi de la définir ainsi, c'est bien qu'il y a une raison tout de même ! Nous verrons cela en fin de chapitre.

PUISSANCES DE MATRICE

La multiplication étant vue, la question de la puissance se pose...

DÉFINITIONS 8 - PUISSANCE D'UNE MATRICE

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et soit $k \in \mathbb{N}$.

- **D1#** Par convention, on pose $A^0 = I_n$.
- **D2#** Si $k \in \mathbb{N}^*$, la **puissance $k^{\text{ème}}$ de A**, notée A^k, est la matrice $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ fois}}$.

> ✘ **ATTENTION !**
> Pour des raisons de compatibilité de tailles, on ne calcule les puissances que de matrices carrées !

Quelques propriétés sur les puissances...

Propriétés 5

Soient A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et k, l, m trois entiers naturels. On a :

P1# $A^k \times A^l = A^{k+l}$

P2# $(A^k)^l = A^{kl}$

P3# Si A et B commutent, alors $(A \times B)^m = A^m \times B^m$

P4# Si A et B commutent, alors les identités remarquables sont valables et la formule du binôme de Newton également :

$$(A+B)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} A^i \times B^{m-i} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} A^{m-i} \times B^i$$

✓ Rigueur !

On insiste : la commutativité de A et B est nécessaire pour utiliser sans danger les deux dernières propriétés ! En effet, de façon générale, $(AB)^2 = ABAB \neq A^2B^2$... et $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$!

Petite remarque

- les matrices A et λI_n commutent.
- les matrices A et A^n commutent.

★ Démonstration : Pas de difficulté particulière... P3 se démontre par récurrence ; et la formule du binôme de Newton a été démontrée dans le chapitre précédent sur les réels (la démonstration est identique, en insistant bien sur la commutativité de A et B au bon endroit). ★

Exemple 6

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = A - 2I_3$.

- Calculons N^2, N^3 puis N^k pour tout $k \in [\![3;+\infty[\![$.
- Déduisons-en une expression simplifiée de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.5 Opérations sur les matrices particulières...

Propriétés 6

P1# La somme et le produit de deux matrices diagonales sont encore des matrices diagonales.

P2# La somme et le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) sont encore des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures).

Petite remarque

Si c'est valable pour le produit de deux, par récurrence, c'est valable pour le produit de k matrices ; et donc pour les puissances !

III Matrices inversibles

Pour l'addition, toute matrice A admet un opposé, la matrice $-A = (-a_{i,j})$. Ce n'est pas le cas de l'inverse pour la multiplication...

Définition 9 - Inversibilité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que la matrice A est **inversible** lorsqu'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times B = B \times A = I_n$.

✘ Attention ! Une matrice qui n'est pas carrée ne peut pas être inversible : ça n'a juste aucun sens !

Propriété 7 - Unicité de l'inverse d'une matrice

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times B = B \times A = I_n$.

★ Démonstration :

★

On peut ainsi nommer l'unique matrice (si existence) qui convient :

Définition 10 - Inverse d'une matrice

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, on appelle **inverse** de A l'unique matrice B telle que $A \times B = B \times A = I_n$.

✎ Notation : On note A^{-1} l'inverse de A.

Une propriété qui nous simplifiera la vie en réduisant le nombre de calculs à faire :

Propriété 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times B = I_n$ **ou** $B \times A = I_n$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

À retenir... Cette propriété permet de ne faire, en pratique, qu'un seul des deux produits lorsque l'on donne A et sa potentielle matrice inverse.

★ Démonstration : Admise... Résultat impossible à démontrer avec nos connaissances actuelles. ★

Exemples 7

E1 La matrice identité de taille n est inversible et son inverse est , car

E2 Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie qu'il existe $k \geq 2$ tel que $M^k = I_n$, alors M est inversible et $M^{-1} =$

E3 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. **Montrons que A est inversible et que $A^{-1} = B$.**

E4 Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$. **Calculons $A^2 - 4A + 3I_2$. Déduisons-en que A est inversible et donnons son inverse.**

Vocabulaire : On dit que le polynôme $X^2 - 4X + 3$ est un **polynôme annulateur** de A.

★ Classique ! ★ C'est courant d'utiliser un polynôme annulateur d'une matrice pour étudier son inversibilité.

☞ Pour info... On démontrera plus tard dans l'année que toute matrice carrée possède au moins un (et donc une infinité...) de polynômes annulateurs non nuls.

E5 La matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est $D^{-1} =$

E6 Soient A, B, C trois matrices telles que $AB = AC$ et A inversible. Que dire de B et C ?

E7 Soient M et P deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que P est inversible. Que dire de $\left(PMP^{-1}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?

À retenir...
Si une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ est inversible, alors $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

★ Classique ! ★
Classique et facile en plus...

Quelques propriétés sur les inverses :

Propriétés 9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

P1# Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et : $(A^{-1})^{-1} = A$

P2# Si A est inversible, alors ${}^tA$ est inversible et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$

P3# Si A et B sont inversibles, alors $A \times B$ est inversible et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

Petite remarque
Puisque ${}^t\left({}^tA\right) = A$, on a même : A est inversible si, et seulement si, ${}^tA$ est inversible.

★ Démonstration :

★

Un premier résultat souvent pratique pour montrer qu'une matrice n'est pas inversible.

Propriété 10 - Condition suffisante de non inversibilité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si l'une des lignes (resp. colonnes) de A est combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes), alors A n'est pas inversible.

À retenir...
En particulier : si une matrice contient une ligne ou une colonne nulle, alors elle n'est pas inversible.

★ Démonstration : **Traitons seulement le cas des lignes ; le cas des colonnes s'obtient ensuite par transposition.**
Notons $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A et supposons que L_1 est combinaison linéaire de $L_2, \dots, L_n$ (méthode identique si c'est une autre ligne, mais plus pénible à écrire). Autrement dit, supposons qu'il existe $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $L_1 = \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n$.
On a ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & \cdots & -\lambda_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & L_2 & \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ & L_n & \end{pmatrix}$$

Or, si A était inversible, en multipliant cette dernière égalité par A^{-1} *par la droite*, on aurait :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & \cdots & -\lambda_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & L_2 & \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ & L_n & \end{pmatrix} \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \star & \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ & \star & \end{pmatrix}$$

Ce qui impliquerait (coefficient première ligne première colonne) $1 = 0$: absurde.
Conclusion : si l'une des lignes de A est combinaison linéaire des autres lignes, alors A n'est pas inversible.

> ☞ **Pour info...**
> En fait, la réciproque est également vraie (c'est donc une CNS), mais ce n'est pas utile en pratique et c'est impossible à démontrer avec nos connaissances actuelles.

★

Exemples 8

Les matrices suivantes ne sont pas inversibles :

Une question demeure : dans le cas général, comment savoir si une matrice est inversible et comment déterminer, le cas échéant, son inverse ?

IV Matrices & systèmes

IV.1 Lien entre matrices et systèmes

Remarquons déjà que :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right. \iff AX = Y$$

où :

- $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ est la matrice des coefficients,
- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est la matrice colonne d'inconnues,
- $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ la matrice colonne second membre.

On peut donc identifier tout système linéaire à une équation matricielle AX = Y.

> **En fait...**
> Cette écriture des systèmes linéaires sous forme matricielle est la raison même du produit matriciel choisi !

IV.2 Inversibilité & système

Ensuite, voici le théorème qui sera très utile en pratique :

Théorème 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
A est une matrice inversible si, et seulement si, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ possède une unique solution.
De plus, si A est inversible, alors l'unique solution de $AX = Y$ est donnée par $X = A^{-1}Y$.

★ Démonstration : Par double implication...

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si A est inversible, alors :

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \left(AX = Y \iff X = A^{-1}Y\right)$$

Par conséquent, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = Y$ possède une unique solution.

$\Longleftarrow$ Supposons que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le système $AX = Y$ admet une unique solution.
L'objectif est de montrer qu'il existe une matrice B telle que $AB = I_n$. On veut donc pouvoir passer d'un résultat général sur les colonnes ($AX = Y$) à un résultat particulier sur les matrices ($AB = I_n$).
Puisque pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = Y$ possède une unique solution ; en particulier, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, si Y_i désigne la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice I_n, alors le système $AX = Y_i$ possède une unique solution notée B_i. En posant B la matrice dont les colonnes sont $B_1, B_2, \ldots, B_n$, alors on a bien $AB = I_n$, et donc A est inversible. ★

Petite remarque
On retrouve, au passage, l'unicité de l'inverse...

En conséquence de ce théorème, on obtient immédiatement :

Propriété 11 - Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité des matrices triangulaires
Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, *tous* ses coefficients diagonaux sont non nuls.

✘ Attention !
FAUX si la matrice n'est pas triangulaire. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a un coefficient diagonal nul, mais elle est inversible.

Exemples 9

E1 Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -17 & 43 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ sont inversibles.

E2 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

E3 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda & 7 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $\lambda \notin \{-1;0;1\}$.

Le théorème 1 permet donc de raccrocher l'étude de l'inversibilité et, le cas échéant, le calcul de l'inverse d'une matrice, à la résolution d'un système linéaire.

☞ Rappel...
Un système à n équations et n inconnues triangulaire est de Cramer si, et seulement si, tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

♣ Méthode 1 ♣ Pour étudier l'inversibilité d'une matrice et donner son inverse.

- On peut commencer par regarder si elle est clairement non inversible (propriété 10) ; sinon :
- on résout, pour toute colonne Y, le système $AX = Y$, où X est l'inconnue. *En pratique, on adoptera souvent une rédaction un peu différente, que l'on verra ci-dessous.*

Exemples 10

Dans chaque cas, étudions l'inversibilité de la matrice A et donnons, le cas échéant, son inverse.

E1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

✍ Rédaction
On explique ce que l'on fait et on indique les opérations sur les lignes.

$\boxed{\textbf{E2}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (avec une rédaction différente)

$\boxed{\textbf{E3}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

IV.3 Cas particulier des matrices 2×2

Propriété 12

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a :

$$A \text{ est une matrice inversible} \iff ad - bc \neq 0$$

Vocabulaire

Ce nombre, $ad - bc$, est appelé **déterminant** de la matrice A, noté det(A).

★ Démonstration : Deux méthodes possibles :

Méthode 1 : Faire comme dans les exemples précédents...

Méthode 2 : Remarquer que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (ad - bc)I_2$... puis raisonner pas double implication :

★

Exemples 11

E1 Sont inversibles :

E2 Ne sont pas inversibles :

E3 **Déterminons les valeurs de λ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.**

Petite remarque

Cela sera assez utile dans l'étude des fonctions de deux variables, en fin de $2^{\text{ème}}$ année !

V Application des matrices dans l'étude de suites

V.1 Suites imbriquées

Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -5u_n + 3v_n \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 6u_n - 2v_n \end{cases}$.

Posons maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_{n+1} = AX_n$$

avec $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.
On démontre ensuite, par une récurrence immédiate, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^n X_0$$

Cette relation nous permet alors de déterminer le terme général de (u_n) (première ligne de la matrice X_n) et celui de (v_n) (deuxième ligne de X_n), à condition d'avoir calculé A^n !

> **Petite remarque**
> C'est la même expression de terme général que pour les suites géométriques...

V.2 Suite récurrente linéaire d'ordre 3

Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n \end{cases}$$

Posons également, pour $n \in \mathbb{N}$: $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} = AU_n$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.
Par la même récurrence immédiate, on peut établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = A^n U_0$$

Là encore, le seul enjeu réside donc dans le calcul de A^n afin d'obtenir U_n dont la première ligne est u_n.

Nous verrons, en exercices, plusieurs méthodes pour calculer les puissances d'une matrice. Dans la plupart des cas, l'exercice indiquera la démarche à suivre et guidera précisément dans la recherche de A^n.

> ☞ **Pour info...**
> Lors de l'étude des applications linéaires, nous verrons une autre utilisation des matrices...