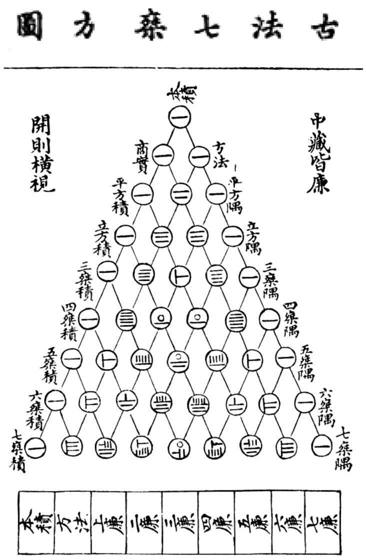
8

Calcul
Coefficients binomiaux

Introduction...

Les coefficients binomiaux étaient déjà connus et utilisés autour des Xème et XIème siècles en Orient et au Moyen-Orient. La plus ancienne illustration existante de leur représentation en triangle est due à Hui YANG (1238-1298, chinois). Ses travaux portaient sur les carrés magiques, ainsi que sur la recherche des racines carrées et des racines cubiques.
Ce triangle, dont on donne une représentation ci-dessous fut ensuite utilisé par des mathématiciens arabes dans les débuts de l'algèbre.
A Blaise Pascal (1623-1662, français), nous devons leur étude complète ; et ce fameux triangle porte aujourd'hui son nom.



Pour bien démarrer...

1 # Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler la définition de $n!$.

2 # Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Donner une forme développée de : $(a+b)^3$.

3 # Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Donner une forme développée de : $(a+b)^4$.

4 # Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Donner une forme développée de : $(a+b)^5$.

5 # Soit E un ensemble à 4 éléments.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$?
2. Combien $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ contient-il de singletons ? De parties à 2 éléments ? De parties à 3 éléments ?

I Coefficients binomiaux

I.1 Partie à k éléments d'un ensemble à n éléments & coefficients binomiaux

Définitions 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble à n éléments. Soit $k \in [\![0;n]\!]$.

D1# On appelle **partie de E à k éléments** un sous-ensemble de E constitué de k éléments.

D2# On note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties de E à k éléments.

☞ Rappel...
On ne tient pas compte de l'ordre d'écriture des éléments dans un ensemble ; et les éléments sont deux à deux distincts.

En gros...
Constituer une partie de E à k éléments c'est *choisir* k éléments *distincts* de E.

☞ Pour info...
Par convention :
- $\binom{0}{0} = 1$
- si $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$.

Exemples 1

E1 Le nombre de paires de délégués possibles choisis au hasard dans une classe de 27 étudiants est égal à $\binom{27}{2}$.

E2 Pour calculer $\binom{3}{2}$, considérons un ensemble $E = \{a, b, c\}$ à 3 éléments et déterminons le nombre de parties de E à 2 éléments.
Les parties de E à deux éléments sont :

Conclusion : $\binom{3}{2} =$

E3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\binom{n}{0} = \qquad ; \qquad \binom{n}{n} = \qquad ; \qquad \binom{n}{1} = \qquad ; \qquad \binom{n}{n-1} =$$

On voit l'ampleur de la tâche si on souhaite, avec cette simple définition, calculer $\binom{17}{9}$... Voyons donc deux propriétés sur les coefficients binomiaux : la deuxième est une relation de récurrence qui va ensuite nous permettre d'obtenir une expression explicite de $\binom{n}{k}$.

I.2 Calculs sur les coefficients binomiaux

Propriété 1 - symétrie des coefficients binomiaux

Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $k \in [\![0;n]\!]$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

★ Démonstration : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0;n]\!]$. Considérons E un ensemble à n éléments.
L'objectif est alors de montrer qu'il y a autant de parties de E à k éléments que de parties à $n-k$ éléments.
C'est le cas, puisqu'à chaque partie de E à k éléments, on peut associer une unique partie de E à $n-k$ éléments : son complémentaire. Il y a donc autant de parties de E àk éléments que de parties de E à $n-k$ éléments.

Conclusion : pour tous $n \in \mathbb{N}$, $k \in [\![0;n]\!]$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. ★

Propriété 2 - relation de Pascal

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0;n-1]\!]$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

★ Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble à $n+1$ éléments.
Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$. Notons E_{k+1} l'ensemble des parties de E à $k+1$ éléments et fixons a un élément de E. L'ensemble E_{k+1} peut alors se décomposer en deux sous-ensembles disjoints de la sorte :

$$E_{k+1} = A_{k+1} \cup B_{k+1}$$

où A_{k+1} est l'ensemble des parties de E à $k+1$ éléments qui contiennent a ; et B_{k+1} l'ensemble des parties de E à $k+1$ éléments qui ne contiennent pas a.
Naturellement, l'union est disjointe puisqu'un ensemble ne peut à la fois contenir a et ne pas le contenir. Ainsi :

$$\operatorname{Card}(E_{k+1}) = \operatorname{Card}(A_{k+1}) + \operatorname{Card}(B_{k+1})$$

Or :

- $\operatorname{Card}(E_{k+1}) = \binom{n+1}{k+1}$;

- Puisque les parties appartenant à A_{k+1} contiennent a, constituer une partie appartenant à A_{k+1} équivaut à ne choisir plus que k éléments de E distincts de a ; ce qui équivaut à choisir k éléments dans $E\setminus\{a\}$, qui est un ensemble à n éléments. Il y a donc $\binom{n}{k}$ telles parties possibles.

  Autrement dit : $\mathrm{Card}\left(A_{k+1}\right) = \binom{n}{k}$.
- Puisque les parties appartenant à B_{k+1} ne contiennent pas a, constituer une partie appartenant à B_{k+1} équivaut à choisir $k+1$ éléments de E distincts de a ; ce qui équivaut à choisir $k+1$ éléments dans $E\setminus\{a\}$, qui est un ensemble à n éléments. Il y a donc $\binom{n}{k+1}$ telles parties possibles.

  Autrement dit : $\mathrm{Card}\left(A_{k+1}\right) = \binom{n}{k+1}$.

Conclusion : pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0;n]\!]$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

★

Application : triangle de Pascal

n \ k	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

Important ! On voit alors l'intérêt de la relation de Pascal, qui fournit un algorithme efficace de calcul des coefficients binomiaux...

Application : lien factorielle & coefficients binomiaux

Propriété 3 - Expression explicite des coefficients binomiaux

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0;n]\!]$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

✘ Attention ! Nous n'avons pas défini $j!$ si j est négatif ; cette relation n'a donc pas de sens que si $k \in [\![0;n]\!]$.

★ Démonstration :

★

Exemple 2

Pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$:

$$\binom{n}{2} =$$

II Formule du binôme de Newton

Voyons maintenant une formule qui fait apparaître les coefficients binomiaux... Formule qui généralise la très fameuse identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + ab + b^2$.

Théorème 1 - formule du binôme de Newton

Pour tous réels a, b et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

À retenir...

Puisque $(a+b)^n = (b+a)^n$, on a également :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

★ Démonstration :