Devoir en temps libre 3
A rendre le mercredi 19 octobre

●○○○ Exercice 1

Considérons la suite (a_n) définie par $\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 2a_n + 2^n \end{cases}$.

1. Considérons la suite (c_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$.
   - **1.a.** Démontrer que (c_n) est arithmétique.
   - **1.b.** En déduire le terme général de (a_n).
2. **Application au calcul d'une somme.**
   - **2.a.** Justifier que pour tout entier naturel k, $a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k$.
   - **2.b.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}$.
   - **2.c.** Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

●●○○ Exercice 2

Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I telle que : $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \in \mathrm{I}$. On considère également la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 \in \mathrm{I}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

> **Vocabulaire**
> On dit que l'intervalle I est stable par f lorsque :
> $$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \in \mathrm{I}$$
> *On reste dans* I *en appliquant* f *à un élément de* I.

1. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans I.
2. Le but de la question est d'étudier les variations de la suite (u_n).
   - **2.a.** Que dire si $f(u_0) = u_0$?
   - **2.b.** Démontrer que si $f(u_0) > u_0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
   - **2.c.** Que dire si $f(u_0) < u_0$?

●●●○ Exercice 3

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \ln(1 + e^x + e^{2x})$ et notons $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan. Justifier que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en déterminer l'équation réduite.