Les Chartreux

Devoir en temps libre 2

A rendre le mercredi 28 septembre

●●○○ Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.

On a :

- $S_1 = 1$
- $S_2 = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$
- $S_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} = \frac{216+27+8}{216} = \frac{251}{216}$

2. Écrire une fonction Python qui prend un entier naturel non nul n en argument d'entrée et renvoie la valeur S_n.

```
#Méthode récursive
def somme(n):
    if n==1:
        return 1
    else:
        return somme(n-1)+1/n**3

#Méthode itérative
def sommebis(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+1/k**3
    return S
```

3. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$ on a : $\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^3-k}$.

Soit $k \in [\![2;+\infty[\![$.
On a :

$$0 \geq -k$$

D'où :

$$k^3 \geq k^3 - k$$

Et comme $k^3 - k = k(k^2-1) > 0$ (puisque $k \geq 2$) et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^3-k}$$

Conclusion : pour tout entier $k \geq 2$ on a $\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^3-k}$.

4. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $S_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}$.

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall k \in [\![2;n]\!],\ \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^3-k}$$

D'où, en sommant :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}$$

Puis :

$$1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}$$

C'est à dire :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}$$

Conclusion : pour tout entier $n \geq 2$, on a $S_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}$.

Petite remarque

Il est important de vérifier que l'inégalité est valable pour $k \in [\![2;n]\!]$ si l'on souhaite sommer de 2 à n... En revanche, il ne faut pas quantifier le k avec un "soit k" en début de question, puisqu'il devient muet quand on somme. D'où seulement le "$\forall k$" au seul endroit utile.

5. Trouver trois réels a, b et c tels que :

$$\forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{k^3-k} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$$

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left(\forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{k^3-k} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}\right) \iff \left(\forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{k^3-k} = \frac{ak(k+1)+b(k-1)(k+1)+ck(k-1)}{k(k-1)(k+1)}\right)$$
$$\iff \left(\forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{k^3-k} = \frac{(a+b+c)k^2+(a-c)k-b}{k(k-1)(k+1)}\right)$$
$$\iff \left(\forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ 1 = (a+b+c)k^2+(a-c)k-b\right)$$
$$\iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=0 \\ -b=1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a+c=1 \\ a-c=0 \\ b=-1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$$

"par identification"

Important !
Il est fondamental de conserver le "$\forall k \in [\![2;+\infty[\![$" à chaque ligne pour l'avoir juste avant l'étape d'identification.
En effet, c'est parce-que "$\forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ 1 = (a+b+c)k^2 + (a-c)k-b$" que l'on peut en déduire les valeurs de a, b, c.

Conclusion : $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = \frac{1}{2}$; et par conséquent : $\forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{k^3-k} = \frac{1/2}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1/2}{k+1}$.

6. Calculer alors, pour tout entier $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}$.

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k} &\underset{\text{q préc}}{=} \sum_{k=2}^{n} \frac{1/2}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1/2}{k+1} && \text{par linéarité de la somme} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}\right) && \text{par télescopage} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout entier $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}$.

7. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$ on a :

$$\frac{251}{216} \leq S_n \leq \frac{5}{4}$$

Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$.

- D'une part, puisque pour tout $k \in [\![3;+\infty[\![$, $\frac{1}{k^3} \geq 0$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \geq \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k^3}$$
D'après la question 1, on obtient ainsi :
$$S_n \geq \frac{251}{216}$$
- D'autre part, d'après les résultats des questions 4. et 5., on a :
$$S_n \leq 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}$$
Et comme $-\frac{1}{2n(n+1)} < 0$, on obtient :
$$S_n \leq \frac{5}{4}$$

Conclusion : pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, on a : $\frac{251}{216} \leq S_n \leq \frac{5}{4}$.

☞ **Pour info...**
La suite (S_n) est donc majorée par $\frac{5}{4}$. De plus, on montre sans difficulté qu'elle est croissante... Le théorème de convergence monotone (que nous reverrons) affirme alors que cette suite est convergente. Autrement dit : la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ existe et est finie. Ce nombre, que l'on notera $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$, est connu sous le nom de **constante d'Apéry**, du nom du mathématicien Roger Apéry (1916-1994, français) qui démontra en 1978 que c'était un nombre irrationnel. Actuellement, nous ne connaissons toujours pas de forme fermée (expression explicite avec les fonctions et opérations de référence) de cette constante, qui vaut, à 10^{-3} près, environ 1,202.

Ce qu'il faut retenir des copies : Dans l'ensemble, c'est beaucoup mieux en terme de rédaction sur une grosse partie des copies. Il faut poursuivre ainsi ; et pour celles et ceux qui ont encore du mal, ce corrigé est un élément supplémentaire pour vous aider dans votre apprentissage. Le mimétisme est important ! Quelques remarques :

- Question 7. : la justification de $S_n \geq S_3$ est souvent absente des copies... elle découle de la positivité du terme général de la somme. On peut aussi mentionner que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante ($\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^3}$...).
- Il est important de comprendre la rédaction de la question 5. L'argument utilisé pour "l'identification" est l'unicité de l'écriture des polynômes. Autrement dit : "deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients". Pour utiliser cet argument, il faut donc, à l'étape précédente, avoir l'information "deux polynômes sont égaux". C'est, en gros (sauf que $k \in [\![2;+\infty[\![$ et par $k \in \mathbb{R}$) ce qui est fourni par l'étape du dessus. On pourrait donc imaginer une étape intermédiaire :

$$\begin{aligned}\left(\forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ 1 = (a+b+c)k^2 + (a-c)k - b\right) &\iff \left(\text{les polynômes } 1 \text{ et } (a+b+c)\mathrm{X}^2 + (a-c)\mathrm{X} - b \text{ sont égaux}\right)\\ &\iff \begin{cases} a+b+c = 0\\ a-c = 0\\ -b = 1\end{cases}\end{aligned}$$

☞ Rappel...

Les fonctions f et g, définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$, sont égales si, et seulement si : $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$ et $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = g(x)$

●●●○ Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} k\ln\left(\left(\frac{k+1}{k}\right)\right) && \text{linéarité de la somme}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k\ln(k) && \text{changement d'indice } i = k+1 \text{ dans la première somme}\\ &= \sum_{i=2}^{n} (i-1)\ln(i) - \sum_{k=1}^{n-1} k\ln(k) && \text{linéarité de la somme}\\ &= \sum_{i=2}^{n} i\ln(i) - \sum_{i=2}^{n} \ln(i) - \sum_{k=1}^{n-1} k\ln(k) && \text{par télescopage}\\ &= n\ln(n) - 1\ln(1) + \ln\left(\prod_{i=2}^{n} i\right)\\ &= n\ln(n) - \ln(n!)\end{aligned}$$

Remarque

> Comme certaines et certains d'entre vous ont entamé autrement ce calcul, voici une autre méthode (moins astucieuse, mais nettement plus calculatoire) :
> On a :
>
> $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)\\ &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)\\ &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right)\end{aligned}$$
>
> Or :
>
> $$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k &= \frac{2}{1} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 \times \ldots \times \left(\frac{n}{n-1}\right)^n\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \ldots \times \frac{n^n}{n-1}\\ &= \frac{n^n}{(n-1)!}\end{aligned}$$
>
> Par conséquent :
>
> $$\sum_{k=1}^{n-1} k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) = n\ln(n) - \ln(n!)$$