Devoir en temps libre 2

A rendre le mercredi 28 septembre

●●○○ Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.
2. Écrire une fonction Python qui prend un entier naturel non nul n en argument d'entrée et renvoie la valeur S_n.
3. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$ on a : $\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^3 - k}$.
4. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $S_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k}$.
5. Trouver trois réels a, b et c tels que :
$$\forall k \in [\![2;+\infty[\![, \ \frac{1}{k^3-k} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$$
6. Calculer alors, pour tout entier $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k}$.
7. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$ on a :
$$\frac{251}{216} \leq S_n \leq \frac{5}{4}$$

☞ Pour info...

La suite (S_n) est donc majorée par $\frac{5}{4}$. De plus, on montre sans difficulté qu'elle est croissante... Le théorème de convergence monotone (que nous reverrons) affirme alors que cette suite est convergente. Autrement dit : la limite $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ existe et est finie. Ce nombre, que l'on notera $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$, est connu sous le nom de **constante d'Apéry**, du nom du mathématicien Roger Apéry (1916-1994, français) qui démontra en 1978 que c'était un nombre irrationnel. Actuellement, nous ne connaissons toujours pas de forme fermée (expression explicite avec les fonctions et opérations de référence) de cette constante, qui vaut, à 10^{-3} près, environ 1,202.

●●●○ Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^{n-1} k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.