Devoir en temps libre 1
A rendre le mercredi 21 septembre

●●○○ Exercice 1 - Deux fonctions classiques

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Étude des fonctions ch et sh

1.a. Étudier la parité des fonctions ch et sh.

ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ qui est un ensemble symétrique par rapport à 0, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{ch}(-x) = ... = \text{ch}(x) \quad ; \quad \text{sh}(-x) = ... = -\text{sh}(x)$$

Conclusion : ch est une fonction paire et sh une fonction impaire.

1.b. Résoudre l'équation $\text{sh}(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \text{sh}(x) = 0 &\iff e^x - e^{-x} = 0 \\ &\iff e^x = e^{-x} \\ &\iff x = -x \quad \text{stricte croissance de exp sur } \mathbb{R}_*^+ \\ &\iff 2x = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

1.c. Étudier les variations de sh puis en déduire son signe.

sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

On en déduit :

x	$-\infty$ $+\infty$
signe de $\text{sh}'(x)$	+
variations de sh	↗

Important ! TOUT LE MONDE (sauf vous) sait qu'il est inutile d'écrire $\text{sh} = \frac{u}{v}$ pour dériver...

De plus, on sait que $\text{sh}(0) = 0$... et comme sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit son signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{sh}(x)$		$-$	0	$+$	

1.d. De même pour ch.

ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{ch}'(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \text{sh}(x) \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on en déduit alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $\text{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de ch		↘	1	↗	

Puisque le minimum de ch sur $\mathbb{R}$ est 1 (atteint en 0), on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) > 0$.

1.e. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}(x) > \text{sh}(x)$.

Pour cela, démontrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) > 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \text{ch}(x) - \text{sh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2} \\ &= e^{-x} > 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}(x) > \text{sh}(x)$

1.f. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de sh en 0, puis étudier la position relative de cette tangente avec la courbe de sh. *On notera $\mathcal{T}_0$ cette tangente.*

- $\mathcal{T}_0 : y = \text{sh}'(0)(x-0) + \text{sh}(0)$, par conséquent, l'équation réduite de $\mathcal{T}_0$ est $y = x$.
- Pour étudier la position relative de $\mathcal{T}_0$ avec la courbe de sh, étudions le signe de $d : x \longmapsto \text{sh}(x) - x$ sur $\mathbb{R}$...
  La fonction d est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$d'(x) = \text{ch}(x) - 1$$
  Or, d'après la question 1.d. :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}(x) \geq 1 \quad ; \quad \text{ch}(0) = 1$$
  D'où :

Horreur !! $\mathcal{T}_0$ est une droite hein ! On ne soustrait pas une droite, ça n'a AUCUN SENS !

Petite remarque Pour étudier le signe de la fonction d, on va ici chercher ses variations en espérant que cela nous permette d'obtenir son signe... comme dans l'exercice 18 du chapitre 1.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$d'(x)$	$+$	0	$+$
d	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Puisque le minimum de la fonction d sur $\mathbb{R}$ est 0, atteint en 0, on a :

$$\forall x \in]-\infty;0[,\ d(x) < 0$$
$$\forall x \in]0;+\infty[,\ d(x) > 0$$

Autrement dit :

$$\forall x \in]-\infty;0[,\ \mathrm{sh}(x) < x$$
$$\forall x \in]0;+\infty[,\ \mathrm{sh}(x) > x$$

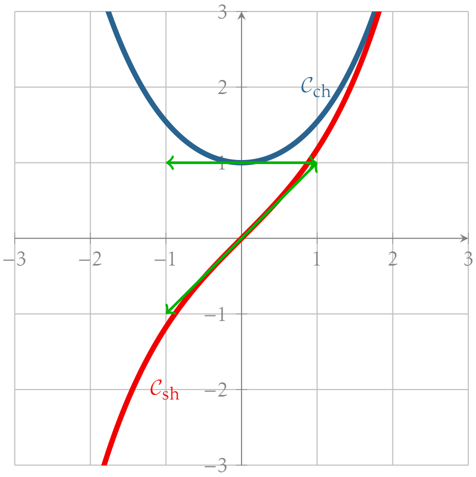
Conclusion : la courbe de sh est au-dessous de $\mathcal{T}_0$ sur $]-\infty;0[$
la courbe de sh est au-dessus de $\mathcal{T}_0$ sur $]0;+\infty[$
la courbe de sh est $\mathcal{T}_0$ se rencontrent en le point de coordonnées $(0,0)$.

Petite remarque
Un peu plus astucieux (merci à E.T.) :
Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que : $e^x \geq x+1$, donc on a aussi : $e^{-x} \geq -x+1$.
En faisant la différence, on obtient :
$$e^x - e^{-x} \geq 2x$$
d'où :
$$\mathrm{sh}(x) \geq x$$
Ne reste qu'à réfléchir aux cas d'égalité...

En tout cas, on ne fait pas comme L.S. : pas de dérivées successives...

1.g. Représenter les allures de ch et sh sur un même graphique.

Petite remarque
On choisira judicieusement l'échelle du repère...



Important !
On fait figurer la tangente à la courbe de sh ; et on la fait coller à cette tangente en le point de tangence...

1.h. Démontrer que pour tout réel x, $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 &= \big(\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\big)\big(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)\big) \\
&= \left(\frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{2}\right) \\
&= e^{-x}e^x \\
&= e^0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout réel x, $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$.

2. On considère maintenant la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)}$.

2.a. Donner l'ensemble de définition de f puis étudier sa parité.

- Notons $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \mathrm{sh}(x) \neq 0$$

Or : $\mathrm{sh}(x) = 0 \iff x = 0$.

Conclusion : l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

- $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \frac{-x}{\mathrm{sh}(-x)} \quad \text{par imparité de sh} \\
&= \frac{-x}{-\mathrm{sh}(x)} \\
&= \frac{x}{\mathrm{sh}(x)} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Conclusion : la fonction f est paire.

2.b. Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = \mathrm{sh}(x) - x\mathrm{ch}(x)$. Étudier les variations de g puis en déduire son signe.

g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \mathrm{sh}'(x) - \big(\mathrm{ch}(x) + x\mathrm{ch}'(x)\big) \\
&= \mathrm{ch}(x) - \big(\mathrm{ch}(x) + x\mathrm{sh}(x)\big) \\
&= -x\mathrm{sh}(x)
\end{aligned}$$

En utilisant le signe de sh obtenu à la question 1.c., on obtient :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
signe de $g'(x)$	$-$
variations de g	0 $\searrow$

Par conséquent, le maximum de g sur $\mathbb{R}^+$ est 0 (atteint en 0).

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \leq 0$.

2.c. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

Posons $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$ de sorte que $f = \dfrac{u}{v}$.
u et v sont dérivables sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ et v ne s'annule pas sur ces intervalles ; par conséquent, f est dérivable sur ces intervalles et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{\mathrm{sh}(x) - x\mathrm{sh}'(x)}{\mathrm{sh}(x)^2} \\ & = & \dfrac{\mathrm{sh}(x) - x\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)^2} \\ & = & \dfrac{g(x)}{\mathrm{sh}(x)^2} \end{array}$$

D'après la question précédente, on déduit le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$, complété sur $]-\infty;0[$ par parité de f... d'où :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$	$\Vert$	$-$
variations de f	$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$

Ce qu'il faut retenir des copies :

- Il faut se servir des questions déjà traitées !! En particulier sur la fin de l'exercice... f est paire, cela doit se voir dans son tableau !!
- On procède par équivalences dans les deux cas suivants (et seulement ces deux cas) :
  1. on résout une équation/inéquation (et les opérations effectuées le permettent...),
  2. on transforme un résultat qui nous semble compliqué à démontrer en un résultat plus simple à établir !

  En revanche, pour les questions 1.e. et 1.h. : vous avez une méthode pour démarrer ; donc on ne doit pas voir de transformation du résultat par équivalences (qui est plus long à rédiger, et moins limpide).
- TANGENTE et pas TANGEANTE ! C'est écrit dans l'énoncé quand-même...
- Il était possible de traiter la question 1.f. à partir de l'étude de la convexité de sh... Mais de façon générale : ce qui n'a pas été revu en classe n'a pas besoin d'être utilisé en devoir !

●●●○ Exercice 2 - Une équation fonctionnelle

Déterminer toutes les fonctions affines f définies sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = 1$.

Par analyse-synthèse...

- **Analyse.** Supposons qu'il existe une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = 1$. Il existe alors deux réels a et b tels que pour tout réel x, $f(x) = ax + b$.
  Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$\begin{array}{rcl} f(f(x)) & = & f(ax+b) \\ & = & a(ax+b)+b \\ & = & a^2x + ab + b \end{array}$$
  On cherche donc à déterminer a et b de sorte que :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ a^2x + ab + b = 1$$
  En particulier :
  - en prenant $x = 0$, on obtient la condition $ab + b = 1$;
  - en prenant $x = 1$, on obtient la condition $a^2 + ab + b = 1$.

  Par conséquent, on obtient :
  $$\left\{ \begin{array}{l} a^2 + ab + b = 1 \\ ab + b = 1 \end{array} \right.$$
  ce qui donne en particulier $a^2 + ab + b = ab + b$, d'où $a^2 = 0$ et donc $a = 0$.
  Et puisque l'on doit avoir $ab + b = 1$, on obtient finalement $b = 1$.
  Conclusion : la *candidate-solution* est la fonction $x \longmapsto 1$.
- **Synthèse.** Regardons si cette fonction convient.
  La fonction $x \longmapsto 1$ est clairement solution du problème...

Conclusion : la seule fonction affine définie sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = 1$, est la fonction $x \longmapsto 1$.