Exercices du chapitre 2
Sommes & produits

●○○○ Exercice 1 - Transformer les écritures

1. Écrire les sommes & produits suivants avec des pointillés :

1.a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 2^k$

1.b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3$

1.c. $\displaystyle\prod_{k=0}^{7} x^k$

1.d. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2$

2. Écrire les sommes & produits suivants avec les symboles $\sum$ et $\prod$:

2.a. $1-2+3-4+\dots.-100$

2.b. $3+5+9+17+33+\dots+1025$

2.c. $1-x+x^2-x^3+\dots-x^{17}$

2.d. $1+4+7+\dots.+100$

2.e. $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{7}{8}\times\dots\times\dfrac{1023}{1024}$

●○○○ Exercice 2 - Calcul de sommes

Calculer les sommes et produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} 3$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1$, pour $n\in\mathbb{N}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} (-1)^k k$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} \frac{2k+5}{3}$
5. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} (2k+4)$, pour $n\geq 3$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{k+1}$, pour $n\in\mathbb{N}$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{3k+2}$, pour $n\in\mathbb{N}$
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{3k+2}}$, pour $n\in\mathbb{N}$
9. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{-1}{3^k}$, pour $n\geq 2$
10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} 5^{n+k}$, pour $n\in\mathbb{N}$
11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k-1)$, pour $n\in\mathbb{N}$
12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$, pour $n\in\mathbb{N}^*$
13. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 2^k$, pour $n\in\mathbb{N}$
14. $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k$, pour $q\neq 1$ et $n\geq p$

●○○○ Exercice 3 - Changement d'indice

Dans chaque somme ou produit, effectuer le changement d'indice donné.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{k+1}$; changement $i=k+1$
2. $\displaystyle\prod_{k=3}^{n+2} (k-2)$; changement $i=k-2$
3. $\displaystyle\sum_{k=4}^{19} (k-4)^2$; changement $i=k-4$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\sqrt{n-k}$; changement $i=n-k$

●●○○ Exercice 4 - Sommes & produits télescopiques

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Montrer : $\forall k\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{98}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\right)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \times k!$.
4. Soit $n \geq 2$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.
5. Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$. En déduire une expression simplifier de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

●●○○ Exercice 5 - Grand classique...

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. En exprimant de deux façons différentes la dérivée de f, établir :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

●●●○ Exercice 6 - Identité remarquable !

Soient a et b deux réels.
Conjecturer et démontrer une formule de factorisation de $a^n - b^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.