Devoir en temps libre 1

A rendre le mercredi 21 septembre

●●○○ Exercice 1 - Deux fonctions classiques

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. **Étude des fonctions ch et sh**
   - **1.a.** Étudier la parité des fonctions ch et sh.
   - **1.b.** Résoudre l'équation $\mathrm{sh}(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   - **1.c.** Étudier les variations de sh puis en déduire son signe.
   - **1.d.** De même pour ch.
   - **1.e.** Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) > \mathrm{sh}(x)$.
   - **1.f.** Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de sh en 0, puis étudier la position relative de cette tangente avec la courbe de sh. *On notera $\mathcal{T}_0$ cette tangente.*
   - **1.g.** Représenter les allures de ch et sh sur un même graphique.
   - **1.h.** Démontrer que pour tout réel x, $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$.

> **Petite remarque**
> On choisira judicieusement l'échelle du repère...

2. On considère maintenant la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)}$.
   - **2.a.** Donner l'ensemble de définition de f puis étudier sa parité.
   - **2.b.** Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = \mathrm{sh}(x) - x\mathrm{ch}(x)$. Étudier les variations de g puis en déduire son signe.
   - **2.c.** En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

★★★★★★★

●●●○ Exercice 2 - Une équation fonctionnelle

Déterminer toutes les fonctions affines f définies sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = 1$.