Les Chartreux

1

Fonctions

Généralités & fonctions usuelles

Introduction...

Cette notion omniprésente dans votre cursus mathématique depuis la troisième, et qui sera encore au cœur d'une grosse partie du programme de ECG, date du XVIIème siècle. Elle fait son apparition lors d'échanges entre Johann Bernoulli et Leibniz avec l'écriture fx pour signifier "f fonction de x". Cette notion sera étendue au XVIIIème siècle par Lehonard Euler (1707-1783, suisse), à qui l'on doit la notation $f(x)$, puis par Gustave Lejeune-Dirichlet (1805-1859, allemand) jusqu'à déboucher au début du XXème siècle sur une branche complète des mathématiques, l'*analyse fonctionnelle*, dont l'objet est l'étude d'ensembles de fonctions, et qui a donné naissance à d'autres branches encore...

On peut cependant attribuer à Leibniz et Isaac Newton (1642-1727, anglais) l'introduction du *calcul différentiel* et du *calcul intégral*, dont les applications ont très largement dépassé l'objectif initial qui était de résoudre des problèmes de mécanique...
Les fonctions offrent une approche globale puisqu'elles permettent l'étude d'une même relation reliant des couples de nombres de deux ensembles (dont le premier est toujours différent des autres) : c'est cette relation qui est au centre du problème quand on étudie une fonction.

Pour bien démarrer...

1 # Qu'est-ce qu'un intervalle de nombres réels ?

2 # Qu'est-ce que l'inverse d'un nombre ?

3 # L'inverse de 0 existe-t-il ?

4 # Que dire de l'assertion suivante : $\forall a, b \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{b}$?

5 # Que dire de l'assertion suivante : $\forall a, b \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$?

6 # Qu'est-ce que la racine carrée d'un nombre positif ?

7 # Que dire de l'assertion suivante : $\forall a, b \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$?

8 # Que dire de l'assertion suivante : $\forall a, b \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$?

9 # Quelles sont les méthodes possibles pour étudier le signe d'une expression ?

10 # Qu'est-ce qu'une fonction ?

Dans tout le chapitre, f désigne une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

I Ensemble de définition & composée de fonctions

Définition 1 - Ensemble de définition

L'ensemble de définition de f est l'ensemble de tous les nombres réels x pour lesquels $f(x)$ existe.

♣ **Méthode 1** ♣ **Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction f :**

- Rédaction pour débuter : Notons $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \ldots$$

- Puis il faut trouver les conditions qui font que $f(x)$ existe : l'expression donnée est utile...
  - une fraction : le dénominateur doit être non nul
  - une racine carrée : l'expression à l'intérieur doit être positive ou nulle
  - du ln : l'expression à l'intérieur doit être strictement positive
  - ...
- Résoudre ces conditions (équations ou inéquations) puis conclure.

✘ **Attention !** Il faut examiner toutes les conditions !

Exemples 1

E1 **Déterminons l'ensemble de définition de la fonction** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-4}$.

Notons $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff x^2 - 4 \neq 0$$

✓ **Rigueur !** On résout une équation, on quantifie donc l'inconnue au préalable...

Or :

$$x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 4 \iff \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -2 \end{cases}$$

✘ **Attention !** Ne pas oublier une des deux solutions de l'équation $x^2 = 4$...

Ainsi : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Conclusion : l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

E2 **Déterminons l'ensemble de définition de la fonction** $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{2x+1}{-3x+6}}$.

Conclusion : l'ensemble de définition de f est ....

E3 **Déterminons l'ensemble de définition de la fonction** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

☞ **Rappels...**

Signe de $ax^2 + bx + c$:
- discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
  - si $\Delta \geq 0$: deux racines

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  - si $\Delta < 0$: pas de racine
- "signe de a à l'extérieur des racines"

Conclusion : l'ensemble de définition de f est ....

Les opérations habituelles sur les fonctions ont déjà été introduites et utilisées... En particulier :

- si f est une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et λ est un réel, alors la fonction λf est la fonction $x \longmapsto \lambda f(x)$, également définie sur $\mathcal{D}_f$;
- si f et g sont deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$, alors la fonction $f+g$ est la fonction $x \longmapsto f(x)+g(x)$, définie sur .... ;
- si f et g sont deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$, alors la fonction $f \times g$ est la fonction $x \longmapsto f(x) \times g(x)$, définie sur .... ;
- si f et g sont deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ telles que g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_g$, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$, définie sur ....

Voyons une nouvelle opération sur les fonctions, déjà rencontrée au lycée...

Définition 2 - Composition de fonctions

Soient f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et g une fonction définie sur $\mathcal{D}_g$.
Si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \in \mathcal{D}_g$, alors la fonction $x \longmapsto g\big(f(x)\big)$ est définie sur $\mathcal{D}_f$. On l'appelle **composée de f par g**, notée $g \circ f$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_f \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathcal{D}_g \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Vocabulaire
On dit "g rond f" pour parler de $g \circ f$.

Exemples 2

E1 Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

- Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$, la fonction $g \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$(g \circ f)(x) =$$
- Puisque la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, la fonction $f \circ g$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
$$(f \circ g)(x) =$$

E2 Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2$ et g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x)$. **Que peut-on dire des fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$?**

Petite remarque
Il se peut que $g \circ f$ existe mais pas $f \circ g$... et si les deux existent, elles sont en général différentes.

II Représentation graphique d'une fonction

Définition 3 - Graphe d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. Le plan est muni d'un repère.
Le **graphe de f sur $\mathcal{D}$** est l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) telles que $x \in \mathcal{D}$ et $y = f(x)$.

Vocabulaire
Graphe, représentation graphique, courbe représentative sont autant d'appellations possibles.

II.1 Positions relatives de deux courbes

Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble $\mathcal{D}$, de courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $\mathcal{D}$ dans un repère orthogonal du plan.
On dira que :

- **$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$** sur $\mathcal{D}$ lorsque pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) > g(x)$
- **$\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$** sur $\mathcal{D}$ lorsque pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) < g(x)$

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_g$ par rapport à $\mathcal{C}_g$, c'est préciser les ensembles sur lesquels $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ et ceux sur lesquels $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$. Cela revient donc à résoudre les inéquations $f(x) > g(x)$ et $f(x) < g(x)$. On pensera également à préciser les points d'intersection des deux courbes.

☞ Rappel...
Les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les couples (x, y) tels que $y = f(x) = g(x)$.

♣ **Méthode 2** ♣ **Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$**, on étudie très souvent le signe de $f(x) - g(x)$...

Exemple 3

Considérons $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}x^2$ et $g : x \longmapsto -x+4$ sur $\mathbb{R}$. **Étudions la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.**

II.2 Vers des régionnements du plan

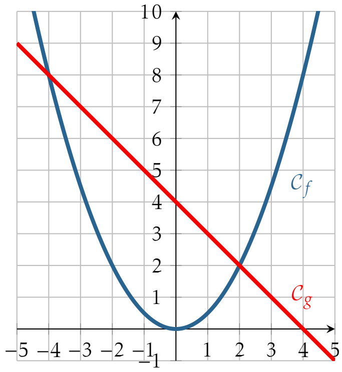
Une fois les courbes des fonctions f et g représentées, on peut aisément résoudre *graphiquement* des équations ou inéquations du type $f(x) = k$, $f(x) < k$ et $f(x) > k$ où k est une constante. On peut également représenter les ensembles $\{(x, y) \;/\; x \in \mathcal{D},\; y \geq f(x)\}$, $\{(x, y) \;/\; x \in \mathcal{D},\; f(x) \leq y \leq g(x)\}$...

Exemple 4

Voici les graphes sur $[-5;5]$ des fonctions $f : x \longmapsto \frac{1}{2}x^2$ et $g : x \longmapsto -x+4$ de l'exemple précédent.

Représentons les ensembles :

- $\{(x, y) \;/\; x \in [-5;5] \text{ ET } y \leq f(x)\}$
- $\{(x, y) \;/\; x \in [-5;5] \text{ ET } f(x) \leq y \leq g(x)\}$
- $\{(x, y) \;/\; x \in [-5;5] \text{ ET } f(x) \geq y \geq g(x)\}$



Définition 4 - Régionnement du plan

Un **régionnement du plan** est un partage du plan en différentes parties.

Petite remarque

Partager pour partager ne suffit pas : il faut savoir comment le partage est effectué...

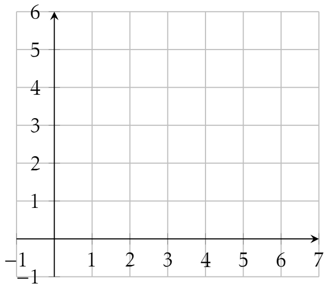
Exemples 5

E1 Dans l'exemple précédent, $\mathcal{C}_g$ partage le plan en trois parties :

- $\{(x, y) \;/\; x \in [-5;5] \text{ ET } y < g(x)\}$: le demi-plan "inférieur" ;
- $\{(x, y) \;/\; x \in [-5;5] \text{ ET } y > g(x)\}$: le demi-plan "supérieur" ;
- $\{(x, y) \;/\; x \in [-5;5] \text{ ET } y = g(x)\}$: la droite d'équation $y = -x + 4$.

Mais on peut donner un autre régionnement du plan, défini par les deux ensembles : $\{(x, y) \;/\; x \in [-5;5] \text{ ET } y < f(x)\}$ et $\{(x, y) \;/\; x \in [-5;5] \text{ ET } y \geq g(x)\}$.

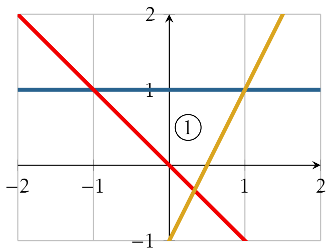
E2 **Ci-dessous, représentons l'ensemble des points de coordonnées (x, y) vérifiant :** $\begin{cases} 0 \leq y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ x + y \leq 7 \\ 2x + y \leq 10 \end{cases}$.



Petite remarque

En exercice, nous verrons comment ce type de régionnement peut être utilisé dans un problème d'optimisation d'un bénéfice sur un exemple simple.

E3 Considérons le graphique ci-dessous. **Déterminons une *condition nécessaire et suffisante* sur x et y pour que le point de coordonnées (x, y) appartienne au domaine 1.**

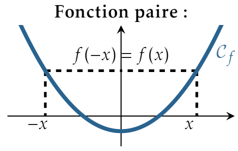


Vocabulaire

On cherche donc une façon de *caractériser* l'appartenance de (x, y) au domaine 1.

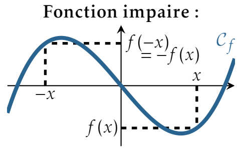
III Parité & imparité

Fonction paire :



$\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Fonction impaire :



$\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère

Définitions 5 - Fonction paire / impaire

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

D1# L'ensemble $\mathcal{D}$ est **symétrique par rapport à 0** lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x \in \mathcal{D} \Longrightarrow -x \in \mathcal{D}\right)$.

D2# f est **paire** lorsque : $\begin{cases} \bullet\ \mathcal{D} \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \bullet\ \forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

D3# f est **impaire** lorsque : $\begin{cases} \bullet\ \mathcal{D} \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \bullet\ \forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

♣ Méthode 3 ♣ **Pour étudier la parité (à adapter pour l'imparité) d'une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$:** on commence par regarder si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 :

- si $\mathcal{D}$ n'est pas symétrique par rapport à 0 : f ne peut pas être paire, ni impaire
- si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0, alors deux cas se présentent :
  1. pour montrer que f est paire, on *démontre par le calcul* que : $\forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = f(x)$
  2. pour montrer que f n'est pas paire, on *cherche un contre-exemple* ; autrement dit, on **trouve un réel x pour lequel $f(-x) \neq f(x)$**

Important !
Le contraire de "$\forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = f(x)$" est :

Exemples 6

E1 Considérons $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^4+1}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, qui est un ensemble symétrique par rapport à 0. Et de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-x}{(-x)^4+1} \\ &= -\frac{x}{x^4+1} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Conclusion : f est une fonction impaire.

✘ Attention !
On "remplace" **tous** les x par $(-x)$, sans oublier les parenthèses !

E2 **Montrons que la fonction $f : x \longmapsto x^2 + x + 1$ n'est ni paire ni impaire.**

Conclusion : f n'est ni paire ni impaire.

IV Minorant, majorant, extrema

Vocabulaire
L'appellation *extremum* regroupe minimum & maximum.

Définitions 6 - Fonction majorée / minorée / bornée - Maximum / minimum

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

D1# f est **minorée** sur $\mathcal{D}$ lorsque : $\exists \mathrm{A} \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \geq \mathrm{A}$.
On dit alors que A est *un* **minorant** de f.

D2# f est **majorée** sur $\mathcal{D}$ lorsque : $\exists \mathrm{B} \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \leq \mathrm{B}$.
On dit alors que B est *un* **majorant** de f.

D3# f est **bornée** sur $\mathcal{D}$ lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée sur $\mathcal{D}$.

D4# m est *le* **minimum** de f sur $\mathcal{D}$ lorsque : $\begin{cases} \bullet\ \forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \geq m \\ \bullet\ \exists x_0 \in \mathcal{D} \,/\, m = f(x_0) \end{cases}$

D5# M est *le* **maximum** de f sur $\mathcal{D}$ lorsque : $\begin{cases} \bullet\ \forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \leq \mathrm{M} \\ \bullet\ \exists x_0 \in \mathcal{D} \,/\, \mathrm{M} = f(x_0) \end{cases}$

✓ Rigueur !
On dit *un* majorant/minorant, car s'il existe un majorant, il y en a une infinité : si f est majorée par 2, alors elle est aussi majorée par 2.07, par 3, par 17, par 43...
En revanche, s'ils existent, maximum & minimum sont uniques. D'où le pronom "le".

✍ Rédaction
Le maximum est en fait un majorant *atteint* par la fonction. **On précisera donc toujours en quelle(s) valeur(s) un maximum est atteint** (idem avec minimum et minorant) !

Exemples 7

E1 La fonction est minorée par 0 sur $\mathbb{R}$, mais 0 n'est pas son minimum, car la fonction n'atteint pas 0. Son minimum est , atteint en .

E2 La fonction est minorée par 0 sur $]0;+\infty[$ mais elle n'admet pas de minimum. De plus, elle n'est pas majorée sur $]0;+\infty[$.

Petite remarque
Une fonction peut admettre un majorant/minorant sans pour autant avoir un maximum/minimum...

En pratique, il n'est pas si aisé de déterminer les éventuels extrema d'une fonction ; à moins d'avoir une connaissance plus précise de son comportement, autrement dit de ses *variations*.

V AUTOUR DES VARIATIONS...

V.1 DÉFINITIONS

DÉFINITIONS 7 - FONCTION STRICTEMENT CROISSANTE / DÉCROISSANTE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

D1# f est **strictement croissante** sur I lorsque : $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I}$, $\left(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)\right)$.

D2# f est **strictement décroissante** sur I lorsque : $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I}$, $\left(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)\right)$.

D3# f est **monotone** sur I si elle ne change pas de variations sur I.

✓ RIGUEUR !
Nous ne parlons jamais de variations sur un ensemble qui n'est pas un intervalle : **ça n'a aucun sens** !

PETITE REMARQUE
Si on ne souhaite pas de *stricte* monotonie, les inégalités sur $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont larges.

Cette définition sert pour connaître les variations d'une fonction mais également pour manipuler les fonctions avec des inégalités :

appliquer une fonction croissante conserve le sens des inégalités, tandis qu'appliquer une fonction décroissante le change.

♣ MÉTHODE 4 ♣ **Pour étudier les variations d'une fonction f sur un intervalle I**, on écrit : "*Soient* $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ *tels que* $x_1 < x_2$", puis deux méthodes possibles :

1. **Première méthode :** on étudie le signe de $f(x_1) - f(x_2)$...
2. **Seconde méthode :** on part de l'inégalité $x_1 < x_2$ et en procédant par opérations élémentaires (ou appliquant des fonctions dont les variations sont déjà connues), on obtient, petit à petit, l'inégalité $f(x_1) < f(x_2)$ (ou $f(x_1) > f(x_2)$).

♣ MÉTHODE !
Pour comparer deux quantités, on étudie souvent le signe de leur différence...

EXEMPLE 8

Étudions les variations, sur $\mathbb{R}$, de la fonction carrée $f : x \longmapsto x^2$.

Conclusion :

PROPRIÉTÉS 1 - OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS MONOTONES

Soient f et g deux fonctions monotones sur un intervalle I.

P1# Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $\lambda > 0$, alors f et λf ont le même sens de variation ;
- si $\lambda < 0$, alors f et λf ont des sens de variations contraires.

P2# Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes), alors $f + g$ est croissante (resp. croissante).

P3# *On suppose que $f \circ g$ est bien définie sur* I.

- Si f et g ont même monotonie, alors $f \circ g$ est croissante.
- Si f et g ont des monotonies opposées, alors $f \circ g$ est décroissante.

★ DÉMONSTRATION : Pour chacune des propriétés, il suffit d'utiliser la méthode vue précédemment... ★

Ces propriétés peuvent être utiles pour déterminer rapidement la monotonie de certaines fonctions dans des cas simples.

EXEMPLES 9

E1 Puisque les fonctions $x \longmapsto x^3$ et $x \longmapsto x$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto x^3 + x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

E2 La fonction $x \longmapsto \dfrac{-1}{x^2}$ est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

De façon générale, nous utiliserons tout de même ce qui suit.

V.2 Liens avec la dérivée

On commence par refaire quelques calculs de dérivées... et apprendre le formulaire de dérivation !

Exemples 10

E1 **Justifions que la fonction $f : x \longmapsto xe^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminons sa dérivée.**

$f = uv$ avec $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto e^x$.
Puisque u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

Conclusion : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)e^x$.

E2 **Justifions que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminons sa dérivée.**

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $u : x \longmapsto x^3$ et $v : x \longmapsto x^2+1$.
Puisque u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x \times x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

Conclusion : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$.

> ✓ **Rigueur !**
> Avant de dériver une fonction, on justifie qu'elle est dérivable.

> ➠ **Réflexe !**
> Dès que possible, on factorise l'expression de $f'(x)$...

Et le fameux théorème (que nous pourrons démontrer plus tard dans l'année) qui relie la dérivée avec l'étude des variations d'une fonction :

Théorème 1 - lien fonction / dérivée

Si f est dérivable sur un intervalle I, alors :

1. $\big(f$ est constante sur I$\big) \iff \big(\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) = 0\big)$
2. $\big(f$ est croissante (resp. décroissante) sur I$\big) \iff \big(\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$)$\big)$
3. $\big(\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) et *ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur* I$\big) \Longrightarrow \big(f$ est strictement croissante (resp. décroissante) sur I$\big)$.

> ✘ **Attention !**
> Pour la stricte croissance, il *suffit* que f' soit strictement positive ; mais ce n'est pas *nécessaire*...

♣ **Méthode 5** ♣ **Pour étudier les variations de f sur I**, deux possibilités :

1. on utilise les propriétés 1 (dans des cas simples) ;
2. on dérive f, on étudie le signe de sa dérivée et on utilise le théorème 1 (très majeure partie des cas) !

Cela permet de faciliter l'étude des variations d'une fonction et d'en obtenir ainsi son *tableau de variations*. Il sera alors aisé d'en obtenir les éventuels extrema.

Exemples 11

E1 **Dressons le tableau de variations, sur $\mathbb{R}$, de la fonction $f : x \longmapsto xe^x$.**

On avait obtenu : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)e^x$. D'où :

E2 **Dressons le tableau de variations sur $\mathbb{R}$, de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}$.**

On avait obtenu : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$. D'où :

> **Petite remarque**
> Parfois, le signe d'une expression est *évident* (fonctions affines, sommes de deux nombres positifs,...), on ne cherche donc pas à le justifier.

VI Fonctions usuelles

Un récapitulatif des fonctions étudiées depuis la première et quelques nouveautés. A partir de ces exemples, nous construirons toutes les fonctions étudiées ces deux prochaines années. C'est dire leur importance...

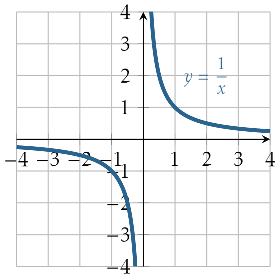
Petite remarque
Un chapitre spécifique sera consacré aux fonctions polynômes...

VI.1 Fonction inverse

Définition 8 - Fonction inverse

La **fonction inverse** est la fonction :

$$\frac{1}{\cdot} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$



Propriétés 2

P1# La fonction inverse est impaire.

P2# La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$.

★ Démonstration : Aucune difficulté (étude des variations à savoir faire sans la dérivée). ★

VI.2 Fonction valeur absolue

Définitions 9 - Valeur absolue

D1# Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est le réel défini par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

D2# La **fonction valeur absolue** est la fonction :

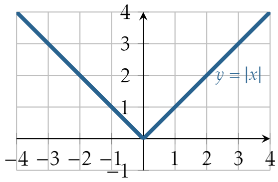
$$|.| : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$$

Pour info...
La fonction valeur absolue est une fonction **affine par morceaux**.

Exemples 12

$|17| = ...$; $|-3| = ...$; $\left|\frac{-1}{3}\right| = ...$; $|\pi - 3| = ...$; $|\sqrt{2} - 2| = ...$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $|(x-1)^2| = (x-1)^2$

Immédiatement à l'aide de la définition, on a :



Propriétés 3

P1# Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|x| \geq 0$.

P2# La fonction valeur absolue est paire.

P3# La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Quelques exemples de résolutions d'équations et inéquations :

Petite remarque
Le nombre $|x-y|$ peut être vu comme la distance entre x et y...

Exemples 13

E1 **Résolvons, dans $\mathbb{R}$, l'équation $|x-3| = 5$:**

E2 **Résolvons, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $|-x+2| \leq 5$:**

E3 **Résolvons, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $|2x+4| \geq 1$:**

Propriétés 4

P1# Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x||y|$ et pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

P2# Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|x^n| = |x|^n$

P3# Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire)*

★ Démonstration :

P1# Sans difficulté, en distinguant des cas selon les signes de x et y.

P2# Par récurrence, en utilisant P1.

P3# **Commençons par transformer le résultat à démontrer...**
Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

★

Et pour terminer avec la valeur absolue, une propriété qui nous sera souvent utile :

Propriété 5

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On a l'équivalence :

$$f \text{ est bornée sur I si, et seulement si, } |f| \text{ est majorée sur I}$$

★ Démonstration :

★

VI.3 Fonction racine carrée

Nul besoin sans doute de débattre sur le nombre de solutions de l'équation $z^2 = x$, d'inconnue $z \in \mathbb{R}$, où x est un nombre réel...

Définitions 10 - Racine carrée

D1# Soit $x \in \mathbb{R}^+$. L'unique solution positive de l'équation $z^2 = x$ est appelée **racine carrée de x**, notée $\sqrt{x}$.

D2# La **fonction racinée carrée** est la fonction :

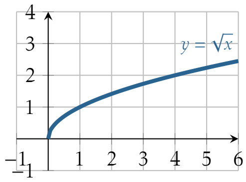
$$\sqrt{\cdot} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$$

Propriétés 6

Par la définition de la racine carrée, on a :

P1# Pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x}^2 = x$

P2# Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.



Propriété 7

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

★ Démonstration : (Sans utilisation de la dérivée) Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que $x_1 < x_2$. On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} &= \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \\ &= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \end{aligned}$$

Or $x_1 < x_2$, donc $\dfrac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} < 0$.
Par conséquent : $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} < 0$, autrement dit : $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$.
Conclusion : la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. ★

♡ Astuce du chef ! ♡

Quand on est un peu coincé avec $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, il est souvent utile d'utiliser son *expression conjuguée* : $\sqrt{a} + \sqrt{b}$...

VI.4 Fonction partie entière

Définitions 11 - Partie entière

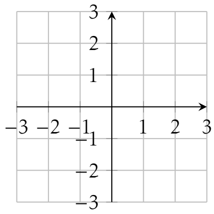
D1# Soit $x \in \mathbb{R}$. Le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x est appelé **partie entière de x**, noté $\lfloor x \rfloor$.

D2# La **fonction partie entière** est la fonction :

$$\lfloor . \rfloor : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$$

★Subtile...★

En toute rigueur, il faudrait justifier au préalable l'existence de ce "plus grand entier relatif inférieur ou égal à x"... en maths appro, ils peuvent !



Exemples 14

$\lfloor 1,7 \rfloor = ...$; $\lfloor 43 \rfloor = ...$; $\lfloor 0,9 \rfloor = ...$; $\lfloor -3,1 \rfloor = ...$; $\lfloor -0,1 \rfloor = ...$

Quelques propriétés, qui découlent rapidement de la définition, et qui sont assez naturelles :

Propriétés 8

P1# $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

P2# $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\big(\lfloor x \rfloor = k \iff$ ....$\big)$

P3# $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

☞ Pour info...

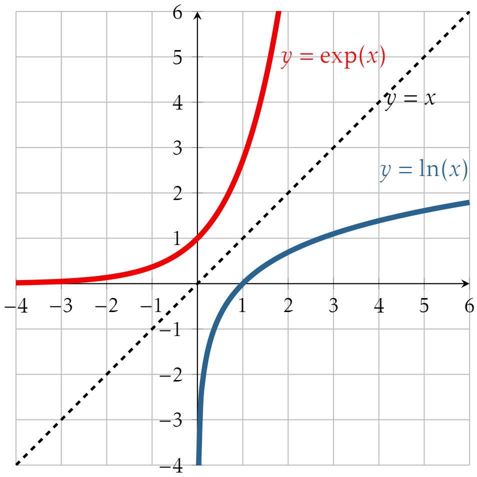
La fonction partie entière est **constante par morceaux**.

Exemple 15

Résolvons l'équation $\lfloor x^2 \rfloor = 4$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

VI.5 Fonctions exponentielle et logarithme népérien

Contentons-nous ici de faire un inventaire de tout ce que nous savons sur ces deux fonctions en mettant en parallèle leurs propriétés... Les démonstrations sur l'exponentielle seront revues en exercice.

	exp	ln
Définition	Unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$...	Pour $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\ln(x)$ est l'unique solution de l'équation $\exp(y) = x$, d'inconnue $y \in \mathbb{R}$.
Ensemble de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_*^+$
Signe	$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0$	$\forall x \in]0;1[,\ \ln(x) < 0\ ;\ \forall x \in]1;+\infty[,\ \ln(x) > 0$
Valeurs remarquables	$\exp(0) = 1 \quad ; \quad \exp(1) = e \simeq 2{,}72$	$\ln(1) = 0 \quad ; \quad \ln(e) = 1$
Dérivée	$\exp' = \exp \quad ; \quad \left(\exp \circ u\right)' = u' \exp(u)$	$\ln' = \frac{1}{\cdot} \quad ; \quad \left(\ln \circ u\right)' = \frac{u'}{u}$
Variations	Strictement croissante sur $\mathbb{R}$	Strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$
Relation fondamentale	$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$	$\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
Propriétés algébriques (qui se déduisent de la relation fondamentale)	$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$, • $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ • $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$ • $\exp(nx) = \left(\exp(x)\right)^n$	$\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+, \forall n \in \mathbb{Z}$, • $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ • $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ • $\ln\left(x^n\right) = n\ln(x)$ • $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$
Courbes représentatives	 Les courbes sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice...	
Liens entre elles	Par définition de ln, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R},\ e^y = x \iff y = \ln(x)$ Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \exp(\ln(x)) = x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x$ exp et ln sont donc **réciproques** l'une de l'autre... D'où la symétrie des courbes !	

★ Démonstration : En utilisant les propriétés sur l'exponentielle (que nous démontrerons en exercice) et la définition de la fonction ln, démontrons les propriétés sur ln.

VI.6 Fonctions puissances

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n = \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ facteurs}}$ et par *convention* : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x^0 = 1$.

On a ainsi : $\forall n, m \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ x^n \times x^m = x^{n+m}$. Également, si $n \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}^*$, on a posé $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.
De plus, on pourrait démontrer que pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, l'équation $z^m = x^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{R}_*^+$ possède une unique solution. Cette solution est notée $x^{\frac{n}{m}}$. En particulier : $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.
A ce stade, nous avons donc donné du sens à l'écriture x^α pour $\alpha \in \mathbb{Q}$ (et $x \in \mathbb{R}_*^+$ si besoin...).
Dans tous les cas, on remarque que pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, en posant $\alpha = \dfrac{n}{m}$ (avec $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$) et tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:

En gros... Même cheminement que pour définir la racine carrée d'un nombre... Logique : nous sommes (en gros) en train de définir la racine m-ième d'un nombre.

$$\begin{aligned}
\left(x^\alpha\right)^m &= x^n \\
&= \exp(\ln(x))^n \\
&= \exp(n\ln(x)) \\
&= \exp(\alpha m \ln(x)) \\
&= \exp(\alpha\ln(x))^m \quad \text{car } m \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}$$

Et puisque la fonction $x \longmapsto x^m$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$, on obtient finalement :

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q},\ \forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ x^\alpha = \exp(\alpha\ln(x))$$

Ce qui nous amène à choisir la définition suivante :

Définition 12 - Fonction puissance α

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha \notin \mathbb{Z}$). La **fonction puissance α** est la fonction :

$$.^\alpha : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \longmapsto & \exp(\alpha\ln(x)) \end{array}\right.$$

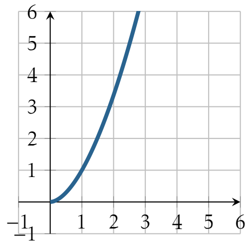
Réflexe! Il faudra penser à cette écriture à chaque fois que l'exposant est une variable... Comme dans l'étude de la fonction $x \longmapsto x^x$.

En particulier, on obtient les deux petites choses suivantes, bien connues et souvent utilisées :

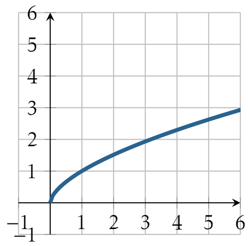
$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \exp(x)$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln(x^\alpha) = \alpha\ln(x)$$

Graphiquement, on retrouve essentiellement trois cas :

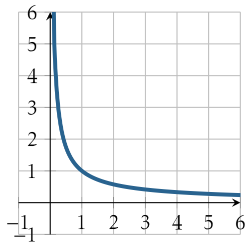
$\alpha > 1$ (type fonction carrée) :



$0 < \alpha < 1$ (type fonction racine carrée) :



$\alpha < 0$ (type fonction inverse) :



La définition précédente et les propriétés sur l'exponentielle permettent de démontrer sans difficulté :

Propriétés 9

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_*^+$, on a :

P1# $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \times x^\beta$

P2# $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

P3# $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$ et $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$

P4# $(xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$ et $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$

On retrouve la dérivée bien connue sur les puissances entières :

Théorème 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f_\alpha : x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

★ **Démonstration** : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:

$$\begin{aligned}
f_\alpha(x) &= x^\alpha \\
&= \exp(\alpha\ln(x))
\end{aligned}$$

Ainsi, $f_\alpha = \exp \circ u$, avec $u : x \longmapsto \alpha\ln(x)$. Puisque u est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, f_α l'est également et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:

$$\begin{aligned}
f_\alpha'(x) &= u'(x)\exp(u(x)) \\
&= \frac{\alpha}{x}\exp(\alpha\ln(x)) \\
&= \frac{\alpha}{x}x^\alpha \\
&= \alpha x^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

★