

EXERCICES DU CHAPITRE 1

FONCTIONS : GÉNÉRALITÉS & FONCTIONS USUELLES

●○○○ EXERCICE 1 - ENSEMBLE DE DÉFINITION

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

1. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$

2. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$

3. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

4. $f : x \mapsto \ln(x^2 - 5x - 6)$

5. $f : x \mapsto \ln(x + 3) - \ln(2x + 1)$

6. $f : x \mapsto \sqrt{x^3 + x^2 + x}$

7. $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2x+1}{-x+4}}$

8. $f : x \mapsto \frac{1}{\ln(x) - 1}$

9. $f : x \mapsto \ln(e^x - 1)$

10. $f : x \mapsto \frac{1}{\ln(x+1)}$

●○○○ EXERCICE 2 - POSITIONS RELATIVES

Étudier les positions relatives des courbes des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sur \mathbb{R}^+ .

●○○○ EXERCICE 3 - OPTIMISATION & RÉGIONNEMENT DU PLAN

Un glacier fabrique deux types de glace au chocolat pour lesquelles les quantités d'ingrédients nécessaires à la fabrication d'un kg de glace sont données dans le tableau ci-dessous.

	glace 1	glace 2
doses de chocolat noir	2	1
doses de lait	2	3
doses de sucre	0	1

Le stock du glacier est constitué de : 16 doses de chocolat, 24 doses de lait et 5 doses de sucre.

- A l'aide d'un régionnement du plan, représenter l'ensemble des quantités x de glace 1 et y de glace 2 que le glacier peut produire.
- Le bénéfice pour la vente d'un kg de glace 1 est de 3€, alors qu'il est de 4€ pour celui de glace 2. Quelle quantité de chaque glace le glacier doit-il produire pour maximiser son bénéfice ?

●○○○ EXERCICE 4 - PARITÉ / IMPARITÉ

1. Dans chaque cas, étudier la parité de la fonction f .

1.a. $f : x \mapsto \frac{x}{x^4 + 1}$

1.b. $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 1}$

1.c. $f : x \mapsto e^{x^2}$

1.d. $f : x \mapsto \frac{x-1}{x^2 + 1}$

1.e. $f : x \mapsto e^x - e^{-x}$

1.f. $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$

1.g. $f : x \mapsto x^3 + \frac{1}{x}$

- Que dire de la somme de deux fonctions paires ? Deux fonctions impaires ? D'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
Mêmes questions avec le produit de deux fonctions.
- Démontrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 admettant deux racines réelles opposées est paire.

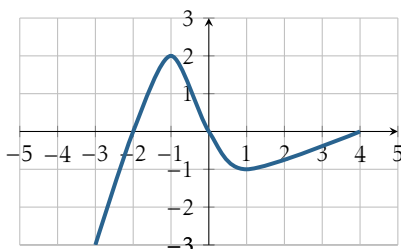
●○○○ EXERCICE 5 - VRAI OU FAUX SUR LA PARITÉ

Dans chaque cas, f est une fonction définie sur \mathbb{R} .

- Si $f(1) = f(-1)$, alors f est paire.
- Si f est impaire, alors $f(2) \neq f(-2)$.
- Si f est paire, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(-x)$.
- S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(-x) = -f(x)$, alors f ne peut pas être paire.

●○○○ EXERCICE 6 - AUTOUR DES COURBES...

Considérons f la fonction définie sur $[-3; 4]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous et représenter sa courbe sur le même graphique.

- $g : x \mapsto f(-x)$
- $h : x \mapsto -f(x)$
- $i : x \mapsto |f(x)|$
- $j : x \mapsto f(x+2)$
- $k : x \mapsto f(x-1)$

●●○○ EXERCICE 7 - VARIATIONS ET ÉQUIVALENCE...

1. Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I . Établir : $\forall a, b \in I, (f(a) = f(b) \iff a = b)$.
2. Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I . Établir : $\forall a, b \in I, (f(a) < f(b) \iff a < b)$.
3. Soit f une fonction croissante sur un intervalle I . La proposition " $\forall a, b \in I, (f(a) \leq f(b) \iff a < b)$ " est-elle vraie?

●●○○ EXERCICE 8 - PROPRIÉTÉS SUR EXP ET LN

1. Exprimer uniquement à l'aide de $\ln(2)$: $\ln(8)$; $\ln(\sqrt{2})$; $\ln(6) - \ln(3)$; $\ln(2e^2)$.
2. Simplifier (x désigne un réel quelconque) :

2.a. $\frac{e^{x^2}}{e^{2x}}$

2.b. $\frac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}}$

2.c. $e^{2\ln x}$

2.d. $-\ln(2x) - \ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

2.e. $\ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

2.f. $\ln(e^4) - \ln(e^2) + \ln(\sqrt{e})$

2.g. $\ln(e^2\sqrt{e}) + \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

2.h. $\frac{\ln(e^5)}{\ln(e^3)}$

2.i. $\sqrt{e^{2x}}e^{-x}$

2.j. $\frac{e^{x^2-2x} \times (e^x)^2}{(e^{2x})^3}$

●●○○ EXERCICE 9 - IRRATIONNEL!

Démontrer que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un irrationnel.

●●○○ EXERCICE 10 - RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS AVEC LES FONCTIONS USUELLES

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $\ln(1 + e^x) = 2$
2. $(1 + \ln(x))^2 = 4$
3. $\sqrt{1 - \ln(x)} = 5$
4. $|\ln(x)| = 1$
5. $|e^x| = 1$
6. $|x + 3| = -1$
7. $|x + 5| = |2x - 7|$

8. $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}$

9. $\lfloor x^2 \rfloor = 9$

10. $2x^4 + x^2 - 1 = 0$

11. $(\ln(x))^2 - 3\ln x + 2 = 0$

12. $e^{2x} = 2e^x - 1$

13. $e^x + e^{-x} = 2$

●●○○ EXERCICE 11 - RÉSOLUTION D'INÉQUATIONS AVEC LES FONCTIONS USUELLES

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x + 5| < 3$
2. $|x - 2| \leq 0$
3. $|2x - 1| \geq 4$
4. $|9 - x^2| \geq -2$
5. $5 - x^2 < 0$
6. $\ln(10 - x^2) > 0$

7. $0,5^x < 0,1$

8. $e^{2x-1} \geq 1$

9. $\frac{1}{e^x + 1} < 2$

10. $2^x \leq 3$

●●○○ EXERCICE 12 - FONCTION PARTIE FRACTIONNAIRE

Notons f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Calculer $f(x)$.
2. Calculer $f(2,5)$ et $f\left(\frac{4}{3}\right)$.
3. Pour $x \in [0; 1[$, simplifier l'expression de $f(x)$.
4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 1) = f(x)$.
5. En déduire la courbe représentative de f .

●●○○ EXERCICE 13 - CALCULS DE DÉRIVÉES

Justifier que chaque fonction f est dérivable sur l'intervalle donné et déterminer sa dérivée.

1. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$

2. $f : x \mapsto \frac{5}{x^7}$ sur $]0; +\infty[$

3. $f : x \mapsto x \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$

4. $f : x \mapsto \frac{x}{e^x}$ sur \mathbb{R}

5. $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$ sur \mathbb{R}

6. $f : x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ sur \mathbb{R}

7. $f : x \mapsto e^{-x^2}$ sur \mathbb{R}

$$8. f : x \mapsto \sqrt{x}e^x \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$9. f : x \mapsto (\ln(1+x))^4 \text{ sur } \mathbb{R}^+$$

$$10. f : x \mapsto xe^{-x^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

••• EXERCICE 14 - ÉTUDE DE FONCTIONS

Pour chaque fonction ci-dessous :

- déterminer son ensemble de définition,
- étudier sa parité,
- déterminer sa dérivée,
- dresser son tableau de variations,
- représenter l'allure de sa courbe.

$$1. f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$$

$$2. f : x \mapsto e^{-x^2}$$

$$3. f : x \mapsto \frac{e^x}{x}$$

$$4. f : x \mapsto x^2e^{-x}$$

$$5. f : x \mapsto 3x + \frac{1}{x^3}$$

$$6. f : x \mapsto xe^{-x^2}$$

$$7. f : x \mapsto x \ln(x) - x$$

$$8. f : x \mapsto \ln(\ln(x))$$

$$9. f : x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$10. f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$11. f : x \mapsto x^x$$

$$12. f : x \mapsto x^{\ln(x)}$$

••• EXERCICE 15 - ÉTUDE DE DEUX FONCTIONS

Notons f et g les fonctions définies sur \mathbb{R}_*^+ par :

$$f(x) = \frac{-1}{2}x^2 + x \ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x) - x + 1$$

1. Dresser le tableau de variations de g sur \mathbb{R}_*^+ .
2. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R}_*^+ et vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f'(x) = g(x)$.
3. Dédire des questions précédentes le tableau de variations de f sur \mathbb{R}_*^+ .

••• EXERCICE 16 - ÉTUDE DE DEUX FONCTIONS

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{x^3+4}{x-1}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Étudier la parité de f .
2. Déterminer la dérivée de f .
3. On considère maintenant la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$.
 - 3.a. Dresser le tableau de variations de g sur \mathbb{R} .
 - 3.b. Calculer $g(2)$ puis en déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur \mathbb{R} .
4. Dédire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. *Les limites de f ne sont pas demandées.*
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 0, notée T_0 . Étudier la position relative de C_f par rapport à T_0 .
6. Représenter l'allure de C_f dans un repère du plan judicieusement choisi.

••• EXERCICE 17 - MANIPULER LES INÉGALITÉS

$$1. \text{ Démontrer : } \forall n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket, \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}.$$

$$2. \text{ Démontrer : } \forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{\frac{3}{x+2}} \geq \sqrt{\frac{3}{x+5}}.$$

$$3. \text{ Démontrer : } \forall x \in \mathbb{R}, e^{2x+1} \leq e^{(x+1)^2}.$$

$$4. \text{ Démontrer : } \forall x \in [0; 1], 0 < e^{-x} + x \leq 2.$$

5. Encadrer les expressions suivantes sur les intervalles donnés :

$$5.a. x^2 \text{ sur } [-3; 1]$$

$$5.b. e^{(1-x)^2} \text{ sur } [2; 4]$$

••• EXERCICE 18 - DES INÉGALITÉS CLASSIQUES

1. 1.a. En étudiant la fonction $x \mapsto e^x - x$, démontrer que pour tout réel x : $e^x \geq x + 1$.

1.b. En déduire que pour tout réel positif $x : e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

2. Démontrer que pour tout $x \geq 0 : x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

●●● EXERCICE 19 - DÉMONSTRATIONS SUR LA FONCTION EXPONENTIELLE...

Dans cet exercice, on suppose inconnues les fonctions exponentielle et logarithme népérien.

On admet qu'il existe au moins une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} , vérifiant :

$$\textcircled{1} \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Dans toute la suite, f désignera donc une telle fonction.

Le but de l'exercice est d'établir un certain nombre de propriétés sur cette fonction f .

1. 1.a. Démontrer que la fonction $x \mapsto f(x) \times f(-x)$ est constante sur \mathbb{R} .

1.b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ et $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

1.c. A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

2. Le but de cette question est d'établir l'unicité d'une fonction vérifiant les conditions $\textcircled{1}$.

On suppose qu'il existe une fonction g vérifiant les conditions $\textcircled{1}$. La question 1.b. permet de définir la fonction $h : x \mapsto \frac{g(x)}{f(x)}$ sur \mathbb{R} . Démontrer que h est constante sur \mathbb{R} puis conclure.

On peut donc maintenant énoncer la définition suivante :

DÉFINITION 1 - FONCTION EXPONENTIELLE

La seule fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} vérifiant les conditions $\textcircled{1}$ est appelée **fonction exponentielle**, notée \exp .

3. Étude de la fonction \exp .

3.a. Étudier les variations de \exp sur \mathbb{R} .

3.b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de \exp au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de C_{\exp} par rapport à cette tangente.

4. Relation fonctionnelle.

4.a. Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Puisque pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$, on peut considérer la fonction g_y , définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_y(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$$

Démontrer que la fonction g_y est constante sur \mathbb{R} .

4.b. En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

4.c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(nx) = \exp(x)^n$.

●●● EXERCICE 20 - MAXIMUM SUR LES ENTIERS

Justifier l'existence et calculer la valeur de $\max_{n \in \mathbb{N}^*} (\sqrt[n]{n})$.

●●● EXERCICE 21 - LOGARITHME ET MOYENNE...

Démontrer que pour tous $x, y > 0$:

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\ln(x) + \ln(y)}{2}$$

●●● EXERCICE 22 - UNE ÉQUATION DIOPHANTINNE!

Déterminer tous les couples (n, p) d'entiers naturels tels que $n^p = p^n$ et $n \neq p$.

●●● EXERCICE 23 - DÉCOMPOSITION D'UNE FONCTION...

Montrer que toute fonction f définie sur \mathbb{R} s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.