# Concours blanc 2 - Épreuve 1

Samedi 14 mai - 4h00

NOM ............................................................ Prénom ............................................................

*La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation. Quelques précisions :*

- ***la copie devra présenter une marge ainsi qu'une en-tête suffisantes,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

*L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.*

"*L'ambition est impitoyable : tout mérite qui ne la sert pas est méprisable à ses yeux.*"
Joseph Joubert

# Exercice 1

On note $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ ; on rappelle qu'on a ainsi : $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$ et $P_2(X) = X^2$. On note également id l'endomorphisme identité sur $\mathbb{R}_2[X]$.
On considère l'application $f$ qui, à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, associe le polynôme $f(P)$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P)(X) = 2XP(X) - (X^2-1)P'(X)$$

**Petite remarque**
L'énoncé suggère de distinguer P de P(X).
On écrira par exemple $P(X) = X^2 - 3x + 5$, ou $P = P_2 - 3P_1 + 5P_0$...

1. (a) Montrer que $f$ est une application linéaire.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$.
On a, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q)(X) &= 2X\big(\lambda P(X) + \mu Q(X)\big) - (X^2-1)\big(\lambda P'(X) + \mu Q'(X)\big) \\ &= \lambda \times 2XP(X) + \mu \times 2XQ(X) - \lambda(X^2-1)P'(X) - \mu(X^2-1)Q'(X) \\ &= \lambda f(P)(X) + \mu f(Q)(X) \end{aligned}$$

Par conséquent : $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

**Conclusion :** $f$ est une application linéaire.

**✘ Attention !**
Ce n'est pas de la "stabilité par combinaison linéaire" ; c'est plutôt "$f$ est compatible avec les combinaisons linéaires".

(b) En écrivant $P(X) = aX^2 + bX + c$, définir explicitement $f(P)$ puis en déduire que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $P(X) = aX^2 + bX + c$.
On a :

$$\begin{aligned} f(P)(X) &= 2X(aX^2 + bX + c) - (X^2-1)(2aX+b) \\ &= bX^2 + 2(a+c)X + b \end{aligned}$$

On a ainsi : $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
Par conséquent, on a établi :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$$

**Conclusion :** $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(c) Écrire $f(P_0)$, $f(P_1)$ et $f(P_2)$ comme des combinaisons linéaires de $P_0$, $P_1$ et $P_2$, puis en déduire la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$. *On notera* A *cette matrice.*
On a :

- $f(P_0)(X) = 2X$, donc $f(P_0) = 2P_1$
- $f(P_1)(X) = 2X^2 - (X^2-1) = X^2 + 1$, donc $f(P_1) = P_0 + P_2$
- $f(P_2)(X) = 2X^3 - 2X(X^2-1) = 2X$, donc $f(P_2) = 2P_1$

**Conclusion :** on en déduit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) En déduire le rang de $f$. $f$ est-il un automorphisme ?
On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f) &= \mathrm{rg}(A) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{la famille } \left(\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right) \text{ est libre} \\ &= 2 \end{aligned}$$

**Conclusion :** $\mathrm{rg}(f) = 2$.

Puisque $\dim\big(\mathbb{R}_2[X]\big) = 3$, on en déduit que $f$ n'est pas surjectif.

**Conclusion :** $f$ n'est pas un automorphisme.

2. Justifier que $\ker(f)$ est de dimension un puis en donner une base constituée d'un seul polynôme, noté $Q_0$.

- D'après le théorème du rang :

$$\dim\big(\mathbb{R}_2[X]\big) = \mathrm{rg}(f) + \dim\big(\ker(f)\big)$$

Or $\dim\big(\mathbb{R}_2[X]\big) = 3$, d'où :

$$\dim\big(\ker(f)\big) = 1$$

- Soit $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \ker(f) &\iff f(P)(X) = 0 && \text{question 1(b)} \\ &\iff bX^2 + 2(a+c)X + b = 0 && \text{un polynôme est nul ssi tous ses coeff sont nuls} \\ &\iff \begin{cases} b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \\ c = c \end{cases} \\ &\iff P(X) = c(1 - X^2) \\ &\iff P = c(P_0 - P_2) \end{aligned}$$

Par conséquent : $\ker(f) = \mathrm{Vect}(P_0 - P_2)$.

**Petite remarque**
On aurait aussi pu déterminer ker(A) et retranscrire la matrice obtenue en polynôme...

**Petite remarque**
L'écriture $\ker(f) = \mathrm{Vect}(1 - X^2)$ conviendrait aussi... même si ce n'est pas, ici, dans l'esprit des notations de l'énoncé.

**Conclusion :** puisque $P_0 - P_2$ est générateur de $\ker(f)$ (qui est de dimension 1), la famille $(P_0 - P_2)$ est une base de $\ker(f)$.
On pose $Q_0 = P_0 - P_2$.

3. (a) Déterminer les réels $\lambda$ tels que $f - \lambda\mathrm{id}$ ne soit pas bijectif.

> ☞ **Rappel...**
> On a l'équivalence : "$f - \lambda\mathrm{id}$ bijectif" $\Longleftrightarrow$ "$A - \lambda I_3$ inversible" $\Longleftrightarrow$ "$\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3$".

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L_1 \longleftrightarrow L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L_2 \longleftarrow 2L_2 + \lambda L_1}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L_2 \longleftrightarrow L_3}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L_3 \longleftrightarrow L_3 - (2-\lambda^2)L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda + \lambda(2-\lambda^2) \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda(4-\lambda^2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda(4-\lambda^2) \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure ; par conséquent, elle est inversible si, et seulement si $\lambda(4-\lambda^2) \neq 0$.

**Conclusion :** $f - \lambda\mathrm{id}$ n'est pas bijectif lorsque $\lambda \in \{-2; 0; 2\}$.

(b) Pour chaque valeur de $\lambda$ trouvée à la question précédente : justifier que $\ker(f - \lambda\mathrm{id})$ est de dimension un puis en donner une base constituée d'un seul polynôme noté $Q_\lambda$.

- Pour $\lambda = 0$ :
  $\ker(f)$ a été déterminé à la question 2. On avait $Q_0 = P_0 - P_2$.
- Pour $\lambda = -2$ :
  On a : $A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et après résolution d'un système, on trouve : $\ker(A + 2I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
  Par conséquent : $\ker(f + 2\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(P_0 - 2P_1 + P_2)$.

  **Conclusion :** $\ker(f + 2\mathrm{id})$ est de dimension 1 et, en posant $Q_{-2} = P_0 - 2P_1 + P_2$, la famille $(Q_{-2})$ est une base de $\ker(f + 2\mathrm{id})$.
- Pour $\lambda = 2$ :
  On a : $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et après résolution d'un système, on trouve : $\ker(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
  Par conséquent : $\ker(f - 2\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(P_0 + 2P_1 + P_2)$.

  **Conclusion :** $\ker(f - 2\mathrm{id})$ est de dimension 1 et, en posant $Q_2 = P_0 + 2P_1 + P_2$, la famille $(Q_2)$ est une base de $\ker(f - 2\mathrm{id})$.

(c) On admet que les polynômes $Q_\lambda$ obtenus à la question précédente forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner la matrice de $f$ dans cette base.

On a :

- $Q_0 \in \ker(f)$, donc $f(Q_0) = 0$
- $Q_{-2} \in \ker(f + 2\mathrm{id})$, donc $(f + 2\mathrm{id})(Q_{-2}) = 0$, d'où $f(Q_{-2}) = -2Q_{-2}$
- $Q_2 \in \ker(f - 2\mathrm{id})$, donc $(f - 2\mathrm{id})(Q_2) = 0$, d'où $f(Q_2) = 2Q_2$

D'où :

$$Mat_{(Q_0, Q_{-2}, Q_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

CQFR

**Ce qu'il faut retenir des copies :**

- On aurait aimé la mention de "linéarité de la dérivation" dans la question 1, même si son absence n'était pas pénalisée.
- Beaucoup trop d'erreurs de calculs dans la question 2 et attention, l'affirmation "$\deg(bX^2 + 2(a+c)X + b) = 2$" est fausse !
- La détermination du noyau de $f$ (question 2) est mal faite
  - Ne pas confondre les objets : un polynôme n'est pas une matrice colonne !
  - La résolution du système linéaire est laborieuse, alors qu'il n'y avait rien à faire... C'est un peu dramatique tout de même !
  - La rédaction de le fin de question "famille génératrice, libre..." est absente !!
- Désastre international pour la question 3(a)... A revoir absolument ! Elle était nécessaire pour la question 3(c) (mais pas pour la 3(d)...).

★★★★★★★

# Exercice 2

Deux joueurs, A et B, décident de s'affronter dans un jeu de hasard.

- Le joueur A lance une pièce donnant PILE avec la probabilité $\frac{2}{3}$, et FACE avec la probabilité $\frac{1}{3}$ jusqu'à l'apparition du second PILE. On note $X_A$ la variable aléatoire égale au nombre de FACE alors obtenues.
- Le joueur B lance une pièce donnant PILE avec la probabilité $p$ ($p \in ]0;1[$), et FACE avec la probabilité $q = 1-p$ jusqu'à l'apparition du premier PILE. On note $X_B$ la variable aléatoire égale au nombre de FACE alors obtenues.

Dans ces conditions de jeu, $X_A$ et $X_B$ sont indépendantes. Le gagnant est celui ayant obtenu le moins de FACE. En cas d'égalité, aucun des deux joueurs ne gagne : il y a match nul.
On note :

- G l'événement "A gagne",
- H l'événement "B gagne",
- N l'évènement "il y a match nul".

On admet que le jeu se termine presque-sûrement.

1. **Loi de $X_B$.** On note $Y_B$ le nombre de lancers effectués par le joueur B.
   (a) Reconnaître la loi de $Y_B$. Préciser $Y_B(\Omega)$, $\mathbb{P}([Y_B = k])$ pour tout $k \in Y_B(\Omega)$, puis rappeler son espérance et sa variance.
   - **Expérience :** pour le joueur B, l'expérience consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité $p$.
   - **Variable aléatoire :** $Y_B$ prend alors comme valeur le rang de ce premier succès.

   **Conclusion :** $Y_B \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
   $Y_B(\Omega) = \mathbb{N}^*$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([Y_B = n]) = q^{n-1}p$
   $E(Y_B) = \frac{1}{p}$ ; $V(Y_B) = \frac{q}{p^2}$

   (b) En déduire la loi de $X_B$ ainsi que son espérance et sa variance.
   $X_B$ renvoie le nombre de FACE obtenues avant le premier PILE ; donc :
   $$X_B = Y_B - 1$$
   On en déduit :
   - $X_B(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_B = k]) &= \mathbb{P}([Y_B - 1 = k]) \\ &= \mathbb{P}([Y_B = k+1]) \\ &= q^k p\end{aligned}$$
   - Puisque $Y_B$ possède une espérance et une variance, et que $X_B = Y_B - 1$, on en déduit que $X_B$ possède également une espérance et une variance et :
   $$\begin{aligned}E(X_B) &= E(Y_B - 1) && \text{linéarité de l'espérance} \\ &= E(Y_B) - 1 \\ &= \frac{1-p}{p} \\ &= \frac{q}{p}\end{aligned}$$
   ainsi que :
   $$\begin{aligned}V(X_B) &= V(Y_B - 1) && \text{invariance de la variance par translation} \\ &= V(Y_B) \\ &= \frac{q}{p^2}\end{aligned}$$

   **Conclusion :** $X_B(\Omega) = \mathbb{N}$ ; $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X_B = k]) = q^k p$
   $E(X_B) = \frac{q}{p}$ ; $V(X_B) = \frac{q}{p^2}$.

   **Vocabulaire**
   On dit parfois que $X_B$ est une transformée affine de $Y_B$.

   (c) On note E l'évènement "le joueur B obtient un nombre pair de FACE". Calculer $\mathbb{P}(E)$.
   On a :
   $$E = \bigcup_{k=0}^{+\infty} [X_B = 2k]$$
   Or, la famille $\left([X_B = 2k]\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille constituée d'évènements deux à deux incompatibles, d'où :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_B = 2k]) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} p \\ &= p \sum_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^k && p \neq 0, \text{ donc } q \neq 1 \\ &= p \frac{1}{1-q^2} \\ &= \frac{p}{(1-q)(1+q)} && \text{car } p = 1-q \\ &= \frac{1}{1+q}\end{aligned}$$

   **✘ Attention !**
   0 est un nombre pair : l'union ne commence donc par à $k = 1$...

**Conclusion :** $\mathbb{P}(E) = \dfrac{1}{1+q}$.

2. **Loi de $X_A$.**

(a) Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire $X_A$.

$X_A(\Omega) = \mathbb{N}$.

(b) Soit $n \in X_A(\Omega)$. Écrire l'évènement $[X_A = n]$ comme union d'évènements deux à deux incompatibles. En déduire :

$$\mathbb{P}([X_A = n]) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$$

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

- $P_k$ l'évènement : "obtenir PILE au lancer $k$"
- $F_K$ l'évènement : "obtenir FACE au lancer $k$"

L'évènement $[X_A = n]$ est réalisé si, et seulement si, le tirage fournit $n$ FACE et 2 PILE, dont un en dernière position (et l'autre peut se situer à toutes les places possibles entre 1 et $n+1$). Ainsi :

$$[X_A = n] = \bigcup_{k=1}^{n+1}\left(P_k \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} F_i\right) \cap P_{n+2}\right)$$

Par incompatibilité, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_A = n]) &= \sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}\left(P_k \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} F_i\right) \cap P_{n+2}\right) \quad \text{par indépendance des lancers, donc indépendance mutuelle des } P_k \text{ et } F_k\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} p^2 q^n\\
&= (n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^n\\
&= (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}
\end{aligned}$$

**Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_A = n]) = (n+1)\dfrac{4}{3^{n+2}}$.

(c) Justifier que $X_A$ possède une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.

- Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}|n\mathbb{P}([X_A = n])| &= \sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}([X_A = n])\\
&= \sum_{n=0}^{N} n(n+1)\frac{4}{3^{n+2}} \quad \text{changement d'indice } k = n+1\\
&= \sum_{k=1}^{N+1} k(k-1)\frac{4}{3^{k+1}}\\
&= \frac{4}{3^3}\sum_{k=1}^{N+1} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}
\end{aligned}$$

**Petite remarque**

Par habitude, on sait que l'on va devoir effectuer un changement d'indice dans le calcul... Donc on ne cherche pas à justifier la convergence via le travail sur le terme général mais à passer par la somme partielle !

- On reconnaît la somme partielle d'une série géométrique dérivée seconde convergente (car $\frac{1}{3} \in ]-1;1[$), d'où la convergence de la série $\sum |n\mathbb{P}(Y = n)|$ et donc l'existence de l'espérance de Y.

  Et de plus :

$$\begin{aligned}
E(X_A) &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}([Y = n])\\
&= \lim_{N\to+\infty}\frac{4}{3^3}\sum_{k=1}^{N+1} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\\
&= \frac{4}{3^3}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}\\
&= 1
\end{aligned}$$

- **Interprétation :** sur un grand nombre de répétitions de cette expérience, le joueur A obtiendra en moyenne 1 FACE.

**Conclusion :** $E(X_A) = 1$.

3. **Le jeu.** L'objectif de cette question est d'étudier le jeu en question.

(a) **Simulation informatique.**

i. Écrire une fonction `Python` de sorte que la commande `simulXB(p)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire $X_B$ lorsque la probabilité d'obtenir PILE est $p$.

```python
import numpy.random as rd

def simulXB(p):
    n=0
    while rd.rand()>p:
        n=n+1
    return n
```

**✘ Attention !**

On veut le nombre de FACE avant le premier PILE. Donc soit on compte, dans le programme, le nombre de FACE (d'où une initialisation à $n = 0$) soit on compte le nombre de lancers et on retourne alors $n-1$.

ii. Expliquer ce que permet d'obtenir la fonction `mystere` suivante :

```python
import numpy.random as rd

def mystere():
    n=0
    while rd.rand()<1/3:
        n=n+1
    while rd.rand()<1/3:
        n=n+1
    return n
```

$n$ commence à 0, puis il augmente de 1 tant que `rd.random()<1/3`, autrement dit, tant que le joueur A obtient FACE.
Il s'arrête ensuite (pour le premier PILE), avant de recommencer à augmenter de 1 à chaque nouveau FACE obtenu, jusqu'à l'apparition d'un nouveau PILE.
Par conséquent : à la fin de son exécution, le programme renvoie une réalisation de la variable aléatoire $X_B$.

iii. Recopier et compléter les lignes manquantes de la fonction ci-dessous de sorte que les variables locales `pG,pH,pN` contiennent respectivement des valeurs approchées de $\mathbb{P}(G)$, $\mathbb{P}(H)$, $\mathbb{P}(N)$.

```python
def probas(p):
    nG,nH,nN=0,0,0
    for k in range(10000):
        XA=mystere()
        XB=simulXB(p)
        if ......
            nG=nG+1
        elif ......
            ......
        else:
            ......
    pG,pH,pN=......
    return pG,pH,pN
```

Le voici, complet :

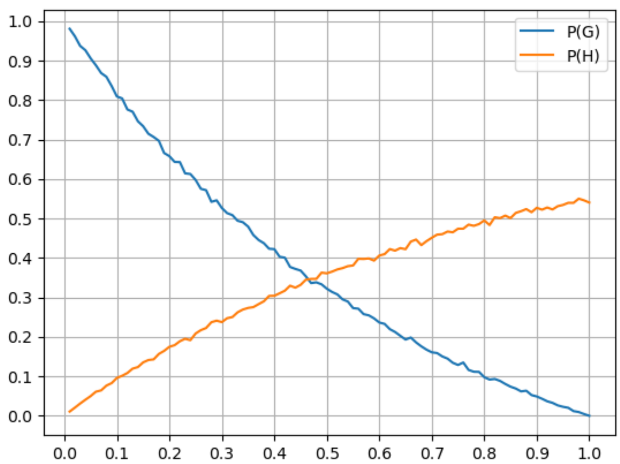
```python
def probas(p):
    nG,nH,nN=0,0,0
    for k in range(10000):
        XA=mystere()
        XB=simulXB(p)
        if XA<XB:
            nG=nG+1
        elif XA>XB:
            nH=nH+1
        else:
            nN=nN+1
    pG,pH,pN=nG/10000,nH/10000,nN/10000
    return pG,pH,pN
```

**Petite remarque**

Le résultat est basé sur la loi faible des grands nombres (au programme de 2ème année) qui affirme que, pour un grand nombre de répétitions, la fréquence observée s'approche de la probabilité.

iv. L'exécution de la commande `probas(0.66)` renvoie : `(0.1911, 0.4344, 0.3745)`. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.
Quand $p = 0,66$, on a : $\mathbb{P}(G) \simeq 0,2$ ; $\mathbb{P}(H) \simeq 0,43$ et $\mathbb{P}(N) \simeq 0,37$.

v. Cette fonction nous permet de tracer, en fonction de $p$, une estimation de $\mathbb{P}(G)$ et $\mathbb{P}(H)$. On obtient le graphique suivant :




Interpréter, dans le contexte de l'exercice, l'abscisse du point d'intersection entre ces deux courbes.

Le point d'intersection correspond à une équité du jeu. Autrement dit, les joueurs A et B semblent avoir à peu près la même probabilité de victoire lorsque $p \simeq 0,47$.

(b) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_B > n]) = q^{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Puisque $X_B(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_B > n]) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_B = k]) && \text{question 1(b)}\\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k p && \text{changement d'indice } i = k-(n+1)\\
&= p\sum_{i=0}^{+\infty} q^{i+n+1}\\
&= pq^{n+1}\sum_{i=0}^{+\infty} q^i && q \neq 1\\
&= pq^{n+1}\frac{1}{1-q} && p = 1-q\\
&= q^{n+1}
\end{aligned}$$

**Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_B > n]) = q^{n+1}$.

**Petite remarque**
On peut aussi écrire :
$\mathbb{P}([X_B > n]) = 1 - \mathbb{P}([X_B \leq n])$...

(c) Justifier l'égalité $\mathbb{P}(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_A = n])\mathbb{P}([X_B > n])$. En déduire que $\mathbb{P}(G) = \frac{4q}{(3-q)^2}$.

- Remarquons déjà que :

$$G = [X_A < X_B]$$

Ensuite, d'après la formule des probabilités totales, avec $\left([X_A = n]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_A < X_B]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\Big([X_A = n] \cap [X_A < X_B]\Big)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\Big([X_A = n] \cap [n < X_B]\Big) && X_A \text{ et } X_B \text{ sont indépendantes}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_A = n])\mathbb{P}([X_B > n])
\end{aligned}$$

**Conclusion :** $\mathbb{P}(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_A = n])\mathbb{P}([X_B > n])$.

**Petite remarque**
On peut aussi continuer le travail sur les évènements et écrire :
$[X_A < X_B] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X_A = n] \cap [X_B > n]$
puis appliquer $\mathbb{P}$ sur cette union d'évènements deux à deux incompatibles...

- Reprenons le calcul :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_A = n])\mathbb{P}([X_B > n]) && \text{questions 2(b) et 3(b)}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}q^{n+1}\\
&= \frac{4q}{9}\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\left(\frac{q}{3}\right)^n && \text{changement d'indice } k = n+1\\
&= \frac{4q}{9}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{q}{3}\right)^{k-1} && \frac{q}{3} \neq 1\\
&= \frac{4q}{9}\frac{1}{\left(1-\frac{q}{3}\right)^2}\\
&= \frac{4q}{(3-q)^2}
\end{aligned}$$

**Conclusion :** $\mathbb{P}(G) = \frac{4q}{(3-q)^2}$.

(d) Déterminer $\mathbb{P}(N)$.

Remarquons déjà que :

$$N = [X_A = X_B]$$

Ensuite, d'après la formule des probabilités totales, avec $\left([X_A = n]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, on a :

**Petite remarque**
On peut aussi continuer le travail sur les évènements et écrire :
$[X_A = X_B] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X_A = n] \cap [X_B = n]$
puis appliquer $\mathbb{P}$ sur cette union d'évènements deux à deux incompatibles...

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([\mathrm{X_A}=\mathrm{X_B}]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([\mathrm{X_A}=n]\cap[\mathrm{X_A}=\mathrm{X_B}]\big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([\mathrm{X_A}=n]\cap[\mathrm{X_B}=n]\big) && \text{$\mathrm{X_A}$ et $\mathrm{X_B}$ sont indépendantes} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\mathrm{X_A}=n])\mathbb{P}([\mathrm{X_B}=n]) && \text{questions 1(b) et 2(b)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}q^n p \\
&= \frac{4p}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{q}{3}\right)^n && \text{calcul de la question précédente} \\
&= \frac{4p}{9}\,\frac{1}{\left(1-\frac{q}{3}\right)^2} \\
&= \frac{4p}{(3-q)^2}
\end{aligned}$$

**Conclusion :** $\mathbb{P}(\mathrm{N}) = \dfrac{4p}{(3-q)^2}$.

(e) En déduire la valeur de $p$ à choisir pour que le jeu soit équitable.

Le jeu est équitable si, et seulement si, $\mathbb{P}(\mathrm{G}) = \mathbb{P}(\mathrm{H})$.
Or : $(\mathrm{G},\mathrm{H},\mathrm{N})$ est un système (quasi-)complet d'évènements, d'où :

$$\mathbb{P}(\mathrm{H}) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{G}) - \mathbb{P}(\mathrm{N})$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\text{le jeu est équitable} \quad &\text{si, et seulement si :} \quad \mathbb{P}(\mathrm{G}) = 1-\mathbb{P}(\mathrm{G})-\mathbb{P}(\mathrm{N}) \\
&\text{si, et seulement si :} \quad 2\mathbb{P}(\mathrm{G})+\mathbb{P}(\mathrm{N}) = 1
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
2\mathbb{P}(\mathrm{G})+\mathbb{P}(\mathrm{N}) = 1 &\iff \frac{8q+4p}{(3-q)^2} = 1 && 3-q\neq 0\,;\, p = 1-q \\
&\iff 4+4q = (3-q)^2 \\
&\iff q^2-10q+5 = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} q = 5-2\sqrt{5} \\ \text{ou} \\ q = 5+2\sqrt{5} \end{array}\right. && q\in\,]0;1[ \\
&\iff q = 5-2\sqrt{5} \\
&\iff p = 2\sqrt{5}-4
\end{aligned}$$

**Conclusion :** le jeu est équitable lorsque $p = 2\sqrt{5}-4 \simeq 0,47$.

**★ Subtile... ★**

$(\mathrm{G},\mathrm{H},\mathrm{N})$ n'est pas un système complet d'évènement, car l'issue conduisant à aucun PILE pour le joueur B et pas de 2ème PILE (ou aucun PILE) pour le joueur A n'appartient à aucun de ces trois évènements... En revanche, puisque le jeu a presque-sûrement une fin, on a bien $\mathbb{P}(\mathrm{G})+\mathbb{P}(\mathrm{H})+\mathbb{P}(\mathrm{N}) = 1$ : autrement dit, $(\mathrm{G},\mathrm{H},\mathrm{N})$ est un système quasi-complet d'évènements. C'est une condition suffisante pour appliquer, par exemple, la FPT (même si elle n'est au programme qu'avec des SCE)...

**Petite remarque**

Cela confirme le graphique de la question 3(a)v...

CQFR

**Ce qu'il faut retenir des copies :**

- La question 1(c) est encore trop mal traitée (et maltraitée) : on rappelle que "$\mathrm{E} = [\mathrm{X_B} = 2k]$" n'a aucun sens...
- On l'avait dit, il faut éviter (surtout en début d'exercice) des formulations imprécises du type "par incompatibilité puis indépendance". Se référer au corrigé pour des arguments plus précis.
- Trop de calculs lourds pour le calcul de $\mathrm{E}(\mathrm{X_A})$, alors qu'un changement d'indice nous simplifiait grandement la vie.
- Les questions Python ont été globalement bien traitées, c'est encourageant.

★★★★★★★

# Exercice 3

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx$ et $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

1. Justifier, pour tout entier naturel $n$, l'existence de $\mathrm{I}_n$ et $\mathrm{J}_n$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x^n}{(1+x)^2}$ et $x \longmapsto \dfrac{x^n}{1+x}$ sont définies et continues sur le segment $[0;1]$ ; donc $\mathrm{I}_n$ et $\mathrm{J}_n$ existent.

> **Petite remarque**
> On verra l'an prochain l'importance de la continuité sur le **segment**...

2. Calculer $\mathrm{I}_0$ et $\mathrm{I}_1$.
   - $$\begin{aligned} \mathrm{I}_0 &= \int_0^1 \frac{x^0}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$
   - $$\begin{aligned} \mathrm{I}_1 &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1+x-1}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \ln(2) - \mathrm{I}_0 \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

> **Petite remarque**
> Plutôt que d'utiliser cette astuce, on aurait aussi pu effectuer le changement de variable $t = 1+x$ ; ou même procéder par IPP.

3. Étudier les variations de la suite $(\mathrm{I}_n)$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
   $$\begin{aligned} \mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx \quad \text{linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{(1+x)^2}\,dx \end{aligned}$$
   Or, pour tout $x \in [0;1]$ :
   - $x^n \geq 0$
   - $x - 1 \leq 0$
   - $(1+x)^2 > 0$

   D'où, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :
   $$\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{(1+x)^2}\,dx \leq 0$$
   **Conclusion :** la suite $(\mathrm{I}_n)$ est décroissante.

> **✍ Rédaction**
> Cette question doit être parfaitement justifiée !! En particulier, on mentionne la "linéarité de l'intégrale" et "la croissance de l'intégrale, avec bornes dans l'ordre croissant". C'est la première fois qu'elles apparaissent, on fait donc un effort !

4. (a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_{n+2} + 2\mathrm{I}_{n+1} + \mathrm{I}_n = \dfrac{1}{n+1}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
   $$\begin{aligned} \mathrm{I}_{n+2} + 2\mathrm{I}_{n+1} + \mathrm{I}_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2}\,dx + 2\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx \quad \text{linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 2x^{n+1} + 2x^n}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 x^n \frac{x^2+2x+1}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 x^n\,dx \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$
   **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_{n+2} + 2\mathrm{I}_{n+1} + \mathrm{I}_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   (b) En déduire $\mathrm{I}_2$.
   D'après le résultat précédent, on obtient :
   $$\mathrm{I}_2 + 2\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_0 = 1$$
   Puis on utilise les résultats de la question 2...
   **Conclusion :** $\mathrm{I}_2 = \dfrac{3}{2} - 2\ln(2)$.

5. (a) A l'aide de la relation établie à la question 4(a), écrire une fonction Python d'en-tête `def I(n):` qui renvoie la valeur de $\mathrm{I}_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

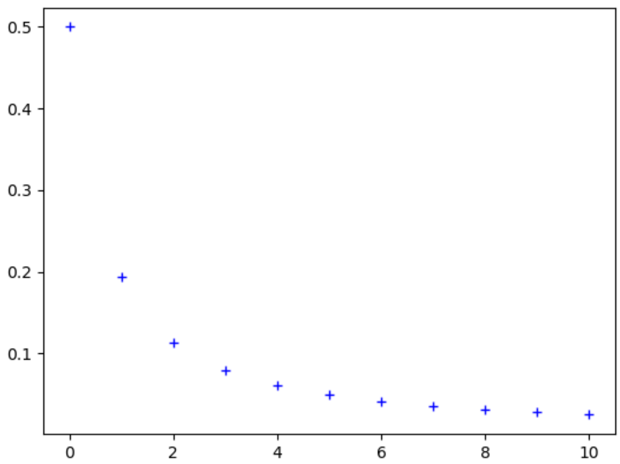
```python
import numpy as np

def I(n):
    if n==0:
        return 1/2
    if n==1:
        return np.log(2)-1/2
    else:
        i=1/2
        j=np.log(2)-1/2
        for k in range(2,n+1):
            i,j=j, 1/(k-1)-2*j-i
        return j
```

**Petite remarque**
Bien entendu, Émile préfère les fonctions récursives, qui sont toutefois plus gourmandes en calculs !

(b) On considère le programme suivant :

```python
1 Labs = ................
2 Lord = ................
3 plt.plot(Labs,Lord,'b+')
4 plt.show()
```

Recopier et compléter les lignes de ce programme, de sorte que son exécution permette d'obtenir le graphique suivant, sur lequel les termes d'indices 0 à 10 de la suite $(\mathrm{I}_n)$ sont représentés.




```
L1 : Labs=range(0,11)
L2 : Lord=[I(n) for n in abs]
```

(c) On considère la fonction Python suivante, dans laquelle on utilise la fonction créée à la question 5(a).

```python
def seuil(p):
    n=0
    while I(n)>p:
        n=n+1
    return n
```

Que faudrait-il démontrer sur la suite $(\mathrm{I}_n)$ pour avoir la garantie que le programme s'arrête pour toute valeur strictement positive de $p$ ?

Le programme permet d'obtenir le premier rang à partir duquel $u_n$ devient inférieur ou égale à $p$ ; par conséquent, le programme s'arrête si $u_n$ devient inférieur ou égal à $p$ à un certain moment...

**Conclusion :** pour s'assurer que la boucle `while` s'arrête pour chaque valeur strictement positive de $p$, il faudrait démontrer que la suite $(\mathrm{I}_n)$ converge vers 0.

6. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \mathrm{I}_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire que la suite $(\mathrm{I}_n)$ est convergente et donner sa limite.

**★ Classique ! ★**
Question très classique dont il faut prendre tous les points !

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  - ◇
  - ◇ Soit $x \in [0;1]$. On a :
  $$1 + x \geq 1$$
  D'où, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$ :
  $$(1+x)^2 \geq 1$$
  Et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$ :
  $$\frac{1}{(1+x)^2} \leq 1$$

Puis, du fait que $x^n \geq 0$ :

$$\frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$$

Or, $x^n \geq 0$ et $(1+x)^2 > 0$, d'où :

$$0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$$

◇ On a ainsi établi :

$$\forall x \in [0;1],\ 0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \mathrm{I}_n \leq \int_0^1 x^n dx$$

**Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \mathrm{I}_n \leq \frac{1}{n+1}$.

- On a :
  - ◇ d'après ce qui vient d'être démontré : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \mathrm{I}_n \leq \frac{1}{n+1}$
  - ◇ $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

**Conclusion :** par théorème d'encadrement, $(\mathrm{I}_n)$ converge vers 0.

> **☞ Rappel...**
> La conclusion du théorème d'encadrement est "$(\mathrm{I}_n)$ converge et sa limite est 0" ; il n'est donc pas nécessaire de mentionner le théorème de convergence monotone (ça démontre un manque de recul, et plus généralement, le théorème d'encadrement permet justement parfois de conclure alors que la suite n'est pas monotone !).

7. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{I}_n = n\mathrm{J}_{n-1} - \frac{1}{2}$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \ ;\ \mathrm{J}_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\left| \begin{array}{l} u : x \longmapsto x^n \\ v : x \longmapsto \frac{-1}{1+x} \end{array} \right.$. Les fonctions $u$ et $v$ sont $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$ : $\left| \begin{array}{l} u'(x) = nx^{n-1} \\ v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \end{array} \right.$.

> **✓ Rigueur !**
> Ne pas oublier la seule hypothèse pour l'IPP : les fonctions doivent être de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'intégration.

Par intégration par parties, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_n &= \left[x^n \times \frac{-1}{1+x}\right]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1} \times \frac{-1}{1+x} dx \\ &= \frac{-1}{2} + n\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx \\ &= n\mathrm{J}_{n-1} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{I}_n = n\mathrm{J}_{n-1} - \frac{1}{2}$.

8. (a) Calculer $\mathrm{J}_0$ puis exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}_{n+1} + \mathrm{J}_n$ en fonction de $n$.

- $$\begin{aligned} \mathrm{J}_0 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \left[\ln(1+x)\right]_0^1 \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_{n+1} + \mathrm{J}_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad \text{linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

**Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}_{n+1} + \mathrm{J}_n = \frac{1}{n+1}$.

(b) En déduire $\mathrm{J}_1$.

D'après la question précédente :

$$\mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_0 = 1$$

or $\mathrm{J}_0 = \ln(2)$...

**Conclusion :** $\mathrm{J}_1 = 1 - \ln(2)$.

9. Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{J}_n = (-1)^n \left( \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

- **Initialisation.** Pour $n=1$ :
On a
$$\begin{aligned}(-1)^n\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) &= (-1)^1\left(\ln(2)-\frac{(-1)^0}{1}\right)\\ &= -(\ln(2)-1)\\ &= 1-\ln(2)\\ &= \mathrm{J}_1\end{aligned}$$
l'initialisation vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\mathrm{J}_n=\mathrm{J}_n=(-1)^n\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$ et montrons que $\mathrm{J}_{n+1}=(-1)^{n+1}\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

On a, d'après la question 8(a) :
$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{n+1} &= -\mathrm{J}_n+\frac{1}{n+1} && \text{par hypothèse de récurrence}\\ &= -(-1)^n\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)+\frac{1}{n+1}\\ &= (-1)^{n+1}\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)+\frac{1}{n+1} && (-1)^{n+1}\times(-1)^{n+1}=(-1)^{2n+2}=1\\ &= (-1)^{n+1}\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)\\ &= (-1)^{n+1}\left(\ln(2)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\frac{(-1)^{n}}{n+1}\right)\right)\\ &= (-1)^{n+1}\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\end{aligned}$$

- **Conclusion :** $\forall n\in\mathrm{N}^*,\ \mathrm{J}_n=(-1)^n\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

10. (a) Utiliser les résultats des questions 6 et 7 pour justifier que la suite $(\mathrm{J}_n)$ converge vers 0.

De la question 7, on déduit : $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathrm{J}_n=\frac{\mathrm{I}_{n+1}+\frac{1}{2}}{n+1}$.
Et d'après la question 6 : $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n=0$.
Ainsi, par opération, on en déduit : $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{J}_n=0$.

**Conclusion :** la suite $(\mathrm{J}_n)$ converge vers 0.

PETITE REMARQUE
On peut également justifier de même que $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{J}_{n-1}=0$, puis conclure.

(b) En déduire la convergence de la série $\sum_{k\geq1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ puis donner la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

D'après ce qui précède et le résultat de la question 9 :
$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)=0$$
D'où, par continuité de la fonction valeur absolue en 0 :
$$\lim_{n\to+\infty}\left|(-1)^n\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right|=0$$
Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :
$$\begin{aligned}\left|(-1)^n\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right| &= \left|(-1)^n\right|\left|\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|\\ &= \left|\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|\end{aligned}$$
On en déduit :
$$\lim_{n\to+\infty}\left|\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|=0$$
Par conséquent :
$$\lim_{n\to+\infty}\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=0$$
Et ainsi :
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln(2)$$

☞ RAPPEL...
$\lim_{x\to a}|f(x)|=0 \iff \lim_{x\to a}f(x)=0$... Mais l'implication $\boxed{\Longrightarrow}$ est fausse si la limite est autre que 0...

**Conclusion :** la série $\sum_{k\geq1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln(2)$.

(c) Démontrer que $\lim_{n\to+\infty}n\mathrm{J}_n=\frac{1}{2}$.

On a, d'après la question 7, pour tout $n\in\mathbb{N}$ :
$$\begin{aligned}n\mathrm{J}_n &= \frac{n(\mathrm{I}_{n+1}+\frac{1}{2})}{n+1}\\ &= \frac{n}{n+1}\left(\mathrm{I}_{n+1}+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Or :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_{n+1} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

D'où, par opération :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\left(\mathrm{I}_{n+1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

**Conclusion :** $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathrm{J}_n = \dfrac{1}{2}$.

☞ Pour info...

On en déduit : $\mathrm{J}_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

CQFR

**Ce qu'il faut retenir des copies :**

- Désastres sur la question 1 !! Déjà parce-que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (c'est quand-même d'un niveau de classe de 2nde) ; et ensuite parce-que les mentions de "fonction dérivable" ou "croissance de l'intégrale" : bah on s'en fout !! Il serait tout de même bien de connaître la seule condition suffisante d'existence d'intégrale au programme : **la continuité de l'intégrande sur le segment d'intégration**.
- Les justifications des inégalités sont bien souvent insuffisantes. Il est indispensable de voir les arguments du type "décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$", "multiplication par un positif"... Quand le résultat est donné (ce qui est souvent le cas) l'objectif n'est pas de le retrouver, mais de justifier soigneusement pourquoi c'est celui-ci.
- Pauvre question 4(a) qui montre que les identités remarquables (on descend en 3ème là, et c'est le premier exemple de factorisation par identité remarquable que vous avez vu, si si...) sont mal repérées par bon nombre d'étudiants...
- Le cheminement de la question 6, archi-classique doit être revu jusqu'à maitrise parfaite !

★★★★★★★

# Exercice 4

Dans tout cet exercice, $f$ désigne la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in ]0;+\infty[, \; f(x) = x - \ln(x)$$

## Partie I : Étude de la fonction $f$

1. Dresser le tableau de variations de $f$ en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
   - $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ :
   $$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{x-1}{x}$$
   - Par opération :
   $$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty}$$
   - Pour tout $x$ suffisamment proche de $+\infty$ :
   $$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$
   Or, par croissance comparée : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
   D'où, par opération :
   $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$
   - On obtient ainsi :

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f$ | \|\| $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in ]0;+\infty[$, admet exactement deux solutions, notées $a$ et $b$, telles que $0 < a < 1 < b$.
   - **Sur $]0;1[$ :**
     - $f$ est continue sur l'intervalle $]0;1[$
     - $f$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;1[$

     Par théorème de bijection, $f$ est bijective de $]0;1[$ dans $f(]0;1[) = ]1;+\infty[$.
     Or $2 \in ]1;+\infty[$.
     Par conséquent, l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution sur $]0;1[$, notée $a$.
   - **Sur $]1;+\infty[$ :**
     De même, l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution sur $]1;+\infty[$, notée $b$.

   **Conclusion :** l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions, notées $a$ et $b$, telles que $0 < a < 1 < b$.

   ✘ **Attention !**
   Si le théorème de bijection a été appliqué sur $]0;1]$ et $[1;+\infty[$, il ne faut pas oublier d'écrire que $f(1) \neq 2$ pour conclure sur "$a < 1 < b$"...

3. Justifier que : $b \in [2;4]$.
   On a :
   - $f(2) = 2 - \ln(2) \leq 2$, car $\ln(2) \geq 0$
   - $f(4) = 4 - \ln(4) = 2(2 - \ln(2))$. Or $2 \leq e$, donc $\ln(2) \leq 1$. D'où : $2 - \ln(2) \geq 1$, et ainsi $f(4) \geq 2$.

   On obtient, puisque $f(b) = 2$ :
   $$f(2) \leq f(b) \leq f(4)$$
   Et $f$ étant strictement croissante sur $[2;4]$ :
   $$2 \leq b \leq 4$$
   **Conclusion :** $b \in [2;4]$.0

   **Important !**
   On justifie que $f(4) > 2$, il est insuffisant de l'écrire !

   ✓ **Rigueur !**
   Attention aux bijections réciproques de $f$ ici... Il y en a 2 : une sur $]0;1]$ et une autre sur $[1;+\infty[$. On préfère donc l'argument de stricte croissance portant sur $f$ sur l'intervalle $[2;4]$ plutôt que sur la bijection réciproque de la restriction de $f$ à $[1;+\infty[$...

4. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme suivant afin que l'exécution de `def b(p)`: renvoie une valeur approchée de $b$ à $p$ près, où $p$ est un réel strictement positif, obtenue par la méthode de dichotomie.

```python
import numpy as np

def g(x):
    return ......

def b(p):
    x1 =...
    x2 =...
    while ......
        m=(x1+x2)/2
        if g(m)==0:
            ......
        elif ......
            x2=m
        elif ......
            ......
    return ......
```

Le voici, complet :

```python
import numpy as np

def g(x):
    return x-np.log(x)-2

def b(p):
    x1=2
    x2=4
    while x2-x1>p:
        m=(x1+x2)/2
        if g(m)==0:
            x1,x2=m,m
        elif g(m)*g(x1)<0:
            x2=m
        elif g(m)*g(x1)>0:
            x1=m
    return (x1+x2)/2
```

**✘ Attention !**
L'algorithme de dichotomie convient pour déterminer une valeur approchée d'une équation $g(x) = 0$, pas $f(x) = 2$...

## Partie II : Étude d'une suite

On définit maintenant la suite $(u_n)$ par : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ existe et $u_n \geq b$.
   Par récurrence...
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$ :
     $u_0$ existe et $u_0 = 4 \geq b$ d'après la question 3. L'initialisation est ainsi vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$u_n$ existe et $u_n \geq b$", et montrons "$u_{n+1}$ existe et $u_{n+1} \geq b$".
     - Par hypothèse de récurrence, $u_n$ existe et $u_n \geq b$. Or, d'après la question 3, $b \geq 2$.
       Par conséquent $u_n > 0$ et ainsi, $\ln(u_n)$ existe. Autrement dit, $u_{n+1}$ existe.
     - De plus, par hypothèse de récurrence :
       $$u_n \geq b$$
       D'où, par croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$ :
       $$\ln(u_n) \geq \ln(b)$$
       Et ainsi :
       $$u_{n+1} \geq \ln(b) + 2$$
       Or on sait que $f(b) = 2$, et de plus :
       $$\begin{aligned} f(b) = 2 &\iff b - \ln(b) = 2 \\ &\iff b = \ln(b) + 2 \end{aligned}$$
       Par conséquent : $\ln(b) + 2 = b$.
       On obtient finalement :
       $$u_{n+1} \geq b$$
       L'hérédité est ainsi établie.

   **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ existe et $u_n \geq b$.

6. Écrire une fonction Python d'en-tête `def u(n):` qui, prenant en argument un entier $n$ de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de $u_n$.

```python
import numpy as np

def u(n):
    U=4
    for k in range(1,n+1):
        U=np.log(U)+2
    return U
```

7. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
     $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln(u_n) + 2 - u_n \\ &= 2 - f(u_n) \end{aligned}$$
     Or on sait que $u_n \geq b$ et que $f$ est croissante sur $[2;+\infty[$. D'où :
     $$f(u_n) \geq f(b) = 2$$
     Par conséquent :
     $$u_{n+1} - u_n \leq 0$$
     **Conclusion :** $(u_n)$ est décroissante.
   - On sait que $(u_n)$ est décroissante et minorée (par 2). Par conséquent, d'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)$ converge vers un réel $\ell \geq 2$.
   - On a ensuite : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.
     Ainsi, par unicité de la limite et continuité de ln en $\ell$ (car $\ell \geq 2$) :
     $$\ell = \ln(\ell) + 2$$
     Or :
     $$\begin{aligned} \ell = \ln(\ell) + 2 &\iff \ell - \ln(\ell) = 2 \\ &\iff f(\ell) = 2 \\ &\iff \ell = b \end{aligned}$$
     $\ell > 1$ et $b$ est l'unique solution de $f(x) = 2$ sur $]1;+\infty[$

**Petite remarque**
On a même $\ell \in [2;4]$, car $(u_n)$ est décroissante, elle est donc majorée par son premier terme.

**Conclusion :** la suite $(u_n)$ converge vers $b$.

8. (a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$.

- Posons $g : x \longmapsto \ln(x) + 2$, définie sur $[b;+\infty[$, de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
D'après ce qui précède, on a également $g(b) = b$.
- La fonction $g$ est dérivable sur $[b;+\infty[$ et :
$$\forall x \in [b;+\infty[,\ g'(x) = \frac{1}{x}$$
D'où :
$$\forall x \in [b;+\infty[,\ 0 < g'(x) \leq \frac{1}{b}$$
Et comme $b \geq 2$, on a $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$.
Ainsi, par transitivité :
$$\forall x \in [b;+\infty[,\ -\frac{1}{2} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$$
**Conclusion :** $\forall x \in [b;+\infty[,\ |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
  - $g$ est dérivable sur $[b;+\infty[$ et : $\forall x \in [b;+\infty[,\ |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
  - $b \in [b;+\infty[$ et $u_n \in [b;+\infty[$ (question 5)

  D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors :
$$|g(u_n) - g(b)| \leq \frac{1}{2}|u_n - b|$$
Or, $g(u_n) = u_{n+1}$ et $g(b) = b$, d'où :
$$|u_{n+1} - b| \leq \frac{1}{2}|u_n - b|$$
Et comme on a vu que $(u_n)$ est minorée par $b$, on a : $u_{n+1} - b \geq 0$ et $u_n - b \geq 0$.

**Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$.

> **➠ Réflexe !**
> Ça empeste l'IAF !! Pour cela, définir la fonction $g$ de sorte que $u_{n+1} = g(u_n)$ et établir : $\forall x \geq b,\ |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$...

> **Petite remarque**
> On pourrait également tout faire sur l'intervalle $[2;4]$, ou même $[b;4]$...

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$ :
On sait que $u_0 = 4$ et $b \geq 2$, donc :
$$0 \leq u_0 - b \leq 2 = \frac{1}{2^{-1}}$$
L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ et montrons $0 \leq u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2^n}$.
Par hypothèse de récurrence :
$$0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$
D'où, en multipliant par $\frac{1}{2}$ (positif) :
$$0 \leq \frac{1}{2}(u_n - b) \leq \frac{1}{2^n}$$
Or, d'après la question précédente :
$$u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$$
D'où, par transitivité :
$$0 \leq u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2^n}$$
L'hérédité est ainsi établie.

**Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

(c) Retrouver alors le résultat obtenu à la question 7, puis déterminer un entier à partir duquel $u_n$ est proche de $b$ à $10^{-3}$ près.

- On a :
  - $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$
  - $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$

  **Conclusion :** par théorème d'encadrement, on retrouve : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = b$.
- Pour déterminer un entier à partir duquel $u_n$ est proche de $b$ à $10^{-3}$ près, il suffit de déterminer un entier $n_0$ tel que $\frac{1}{2^{n_0-1}} \leq 10^{-4}$.
Or, on sait que $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$.
Posons alors $n_0 = 11$. On a ainsi :
$$\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ \frac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-3}$$
D'où, en utilisant le résultat de la question précédente et par transitivité :
$$\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![,\ 0 \leq u_n - b \leq 10^{-3}$$
**Conclusion :** à partir du terme d'indice 11, nous sommes certains que $u_n$ est une valeur approchée de $b$ à $10^{-3}$ près.

## Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Considérons la fonction :

$$\varphi : x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt$$

9. Montrer que $\varphi$ est bien définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in ]0;+\infty[,\ \varphi'(x) = \frac{\ln(2)-\ln(x)}{(x-\ln(x))(2x-\ln(2x))}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.
  Puisque $f$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_*^+$, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{f(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.
  De plus, puisque $[x;2x] \subset \mathbb{R}_*^+$, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{f(t)}$ est continue sur le segment $[x;2x]$.
  Par conséquent : $\varphi(x)$ existe.

  **Conclusion :** $\varphi$ est définie sur $\mathbb{R}_*^+$.

- Puisque la fonction $t \longmapsto \frac{1}{f(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, elle admet une primitive, F, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
  On a également :
  $$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \varphi(x) = \mathrm{F}(2x) - \mathrm{F}(x)$$

- Par conséquent, $\varphi$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$, comme composée et somme de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles adéquats ; et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ :

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= 2\mathrm{F}'(2x) - \mathrm{F}'(x) \\
&= \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\
&= \frac{2}{2x-\ln(2x)} - \frac{1}{x-\ln(x)} \\
&= \frac{2(x-\ln(x)) - (2x-\ln(2x))}{(2x-\ln(2x))(x-\ln(x))} \\
&= \frac{-2\ln(x)+\ln(2x)}{(2x-\ln(2x))(x-\ln(x))} \\
&= \frac{-2\ln(x)+\ln(2)+\ln(x)}{(2x-\ln(2x))(x-\ln(x))} \\
&= \frac{\ln(2)-\ln(x)}{(2x-\ln(2x))(x-\ln(x))}
\end{aligned}$$

**Conclusion :** $\forall x \in ]0;+\infty[,\ \varphi'(x) = \dfrac{\ln(2)-\ln(x)}{(x-\ln(x))(2x-\ln(2x))}$.

**Petite remarque** — En rédigeant un peu différemment, on pourrait en fait justifier que $\varphi$ est définie sur $\mathbb{R}_*^+$ de la même façon que l'on justifie qu'elle est $\mathcal{C}^1$... Mais on préfère se souvenir que l'existence d'une intégrale est garantie par la **continuité de l'intégrande sur le segment d'intégration**.

10. En déduire les variations de $\varphi$ sur $]0;+\infty[$.
Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.

- On a :
  $$\ln(2) - \ln(x) \geq 0 \iff x \leq 2$$
- On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$, $f(t) \geq 1$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$, $t > \ln(t)$.
  Par conséquent :
  $$x - \ln(x) > 0 \ ;\ 2x - \ln(2x) > 0$$

On en déduit :

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\varphi$ | ‖ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | |

**Réflexe !** — On veut encadrer une intégrale : on encadre l'intégrande !!

11. Montrer que : $\forall x \in ]0;+\infty[,\ 0 \leq \varphi(x) \leq x$.
Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.
On a :
$$\forall t \in [x;2x],\ f(t) \geq 1$$
D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $[1;+\infty[$ :
$$\forall t \in [x;2x],\ \frac{1}{f(t)} \leq 1$$
Et comme $f$ est positive sur $\mathbb{R}_*^+$, on a même :
$$\forall t \in [x;2x],\ 0 \leq \frac{1}{f(t)} \leq 1$$
Puis, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :
$$0 \leq \varphi(x) \leq \int_x^{2x} 1\, dt$$

**Conclusion :** $\forall x \in ]0;+\infty[,\ 0 \leq \varphi(x) \leq x$.

12. (a) Montrer que $\varphi$ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore $\varphi$ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\varphi(0)$.
On a :
   - $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ 0 \leq \varphi(x) \leq x$
   - $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

D'où, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0$$

**Conclusion :** $\varphi$ est prolongeable par continuité en posant $\varphi(0) = 0$.

(b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} \varphi'(x) = 0$.

*On admet que la fonction $\varphi$ est alors dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 0$.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{\ln(x)}{\ln(x)\ln(2x)} \times \frac{\frac{\ln(2)}{\ln(x)} - 1}{\left(\frac{x}{\ln(x)} - 1\right)\left(\frac{2x}{\ln(2x)} - 1\right)} \\ &= \frac{1}{\ln(2x)} \times \frac{\frac{\ln(2)}{\ln(x)} - 1}{\left(\frac{x}{\ln(x)} - 1\right)\left(\frac{2x}{\ln(2x)} - 1\right)} \end{aligned}$$

**✘ Attention !** La limite est en 0... et il y a une FI, due aux ln(...). D'où la factorisation choisie ! **On factorise par ce qui domine.**

On conclut par opérations...

**Conclusion :** $\lim\limits_{x\to 0} \varphi'(x) = 0$.

**✘ Attention !** Pas de CC !!

13. (a) Démontrer que pour tout $t \geq 4$ : $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{f(t)} \leq \dfrac{1}{t-\sqrt{t}}$.

- Soit $t \geq 4$. Puisque $\ln(t) \geq 0$, on a $t - \ln(t) \geq t$, c'est à dire $f(t) \geq t (\geq 4)$.
  Puis, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$, on obtient :
  $$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{f(t)}$$
- Pour tout $t \geq 4$, on a :
  $$f(t) \geq t - \sqrt{t} \iff \ln(t) \leq \sqrt{t}$$
  - Posons alors $h : t \longmapsto \ln(t) - \sqrt{t}$.
    La fonction $h$ est dérivable sur $[4;+\infty[$ et, pour tout $t \geq 4$ :
    $$h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{2-\sqrt{t}}{2t\sqrt{t}}$$
    D'où :

| $t$ | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $h'(t)$ | $0$ $\quad -$ | |
| $h$ | $-2+\ln(4)$ $\searrow$ | $-\infty$ |

  - Or $4 < e^2$, donc $-2+\ln(4) < 0$.
    Ainsi :
    $$\forall t \geq 4,\ h(t) \leq 0$$
    Autrement dit :
    $$\forall t \geq 4,\ \ln(t) \leq \sqrt{t}$$

  Par conséquent :
  $$\forall t \geq 4,\ f(t) \geq t - \sqrt{t}\ (>0)$$
  Et ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$ :
  $$\forall t \geq 4,\ \frac{1}{f(t)} \leq \frac{1}{t-\sqrt{t}}$$

**Conclusion :** pour tout $t \geq 4$, $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{f(t)} \leq \dfrac{1}{t-\sqrt{t}}$.

(b) Considérons la fonction $h : t \longmapsto 2\ln\left(\sqrt{t}-1\right)$ définie sur $[4;+\infty[$. Dériver $h$.

$h$ est dérivable sur $[4;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur les intervalles adéquats et, pour tout $t \geq 4$ :

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2\frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{\sqrt{t}-1} \\ &= \frac{1}{t-\sqrt{t}} \end{aligned}$$

**Conclusion :** $\forall t \geq 4,\ h'(t) = \dfrac{1}{t-\sqrt{t}}$.

(c) En déduire que pour tout $x \geq 4$ : $\ln(2) \leq \varphi(x) \leq 2\ln\left(\dfrac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

Soit $x \geq 4$. Puisque $[x;2x] \subset [4;+\infty[$, on a, d'après la question 13(a) :

$$\forall t \in [x;2x],\ \frac{1}{t} \leq \frac{1}{f(t)} \leq \frac{1}{t-\sqrt{t}}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, avec les bornes dans l'ordre croissant :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt \leq \varphi(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t-\sqrt{t}}\,dt$$

Or :

- $$\begin{aligned}\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt &= \Big[\ln(t)\Big]_x^{2x} \\ &= \ln(2x) - \ln(x) \\ &= \ln(2)\end{aligned}$$

- D'après la question 13(b) :

$$\begin{aligned}\int_x^{2x} \frac{1}{t-\sqrt{t}}\,dt &= \Big[h(t)\Big]_x^{2x} \\ &= h(2x) - h(x) \\ &= 2(\ln(\sqrt{2x}-1) - \ln(\sqrt{x}-1)) \\ &= 2\ln\left(\frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)\end{aligned}$$

**Conclusion :** pour tout $x \geq 4$, $\ln(2) \leq \varphi(x) \leq 2\ln\left(\frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

(d) Déterminer la limite de $\varphi$ en $+\infty$.

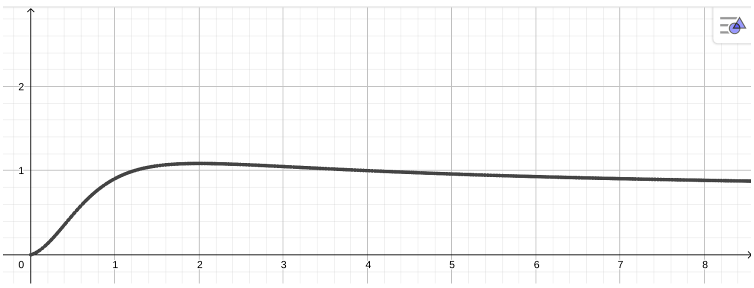
Voir chapitre 6 - exemple 8 ! ! Et oui, je vous l'avais dit en plus à l'époque que vous auriez cette question à un moment donné dans l'année...

**Conclusion :** par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \ln(2)$.

14. Tracer l'allure de la courbe représentative de $\varphi$ dans un repère orthonormé du plan. On veillera à faire apparaître les différentes tangentes ou asymptotes connues.
*Donnée :* $\varphi(2) \simeq 1,1$.

Récapitulons quelques informations à faire apparaître :

- $\varphi$ est strictement croissante sur $]0;2]$, strictement décroissante sur $[2;+\infty[$
- $\varphi'(0) = 0$, donc $\mathcal{C}_\varphi$ admet une demi-tangente horizontale au point de coordonnées $(0,0)$ (car $\varphi(0) = 0$)
- $\varphi'(2) = 0$, donc $\mathcal{C}_\varphi$ admet une tangente horizontale au point de coordonnées $(2, \varphi(2))$
- $\lim\limits_{+\infty} \varphi = \ln(2)$, donc $\mathcal{C}_\varphi$ admet une asymptote "horizontale" d'équation $y = \ln(2)$ au voisinage de $+\infty$




**Petite remarque**

Impossible de primitiver $\frac{1}{f}$ avec des fonctions usuelles. Dans ce cas, la seule façon de calculer des valeurs de $\varphi(x)$ est d'obtenir une valeur approchée de $\int_x^{2x} \frac{1}{f}$ par une méthode d'approximation d'intégrale.

**Ce qu'il faut retenir des copies :** On est sur du yapasplusclassique, et pourtant certaines choses doivent être re$^k$dites (avec $k$ entier naturel suffisamment proche de $+\infty$)...

- La fameuse récurrence dans laquelle on doit démontrer que "$u_n$ existe" est à revoir, encore et toujours... Pour justifier que $u_{n+1}$ existait ici, il fallait explicitement mentionner que $u_n > 0$ pour appliquer ln.
- Le travail sur les inégalités est mal justifié (croissance/décroissance d'une fonction qu'on applique, signe d'un réel par lequel on multiplie/divise...).
- Même constat que dans l'exercice 3 pour l'existence de $\varphi(x)$ dans la partie III. On doit voir la continuité de l'intégrande sur le segment $[x;2x]$ (au passage, comme $x > 0$, on a toujours $x < 2x$...).

Également, le lien entre les parties I et II n'a été que très rarement fait... Ce lien permettait de bien justifier l'hérédité dans la question 5, mais aussi de ne pas faire n'importe quoi sur la question 7 !
Dans l'ensemble, c'est donc un manque de rigueur et de précision qui est noté sur bon nombre de copies.
La majeure partie des points de cet exercice est à la portée de tous : il est indispensable de savoir les prendre !

★★★★★★★

**Fin du sujet**