Concours blanc 2 - Épreuve 2

Mercredi 18 mai - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation. Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une marge ainsi qu'une en-tête suffisantes,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés).***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

Si au cours de l'épreuve, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est autorisé à traiter l'un des sujets suivants :

Sujet A : "Aimer, est-ce être linéairement indépendant ?"

Sujet B : "Aimer, est-ce manquer d'espace vectoriel ?"

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilité composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine. On étudie le modèle suivant :

- le nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurances sur une période donnée est une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$;
- les coûts des sinistres successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. On suppose que les variables U_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et toutes de même loi, et sont indépendantes de N ;
- on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k$ et X_0 est la variable certaine de valeur 0 ; et on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est également indépendante de N.
- La charge sinistrale totale pour la compagnie d'assurance sur une période est donnée par la variable aléatoire X définie par :
$$X = \sum_{k=1}^{N} U_k$$
et l'on précise que $X = X_0 = 0$ si N prend la valeur 0. **On dit que X suit une loi composée.**
- Pour tout entier naturel j, on pose $p_j = \mathbb{P}(N = j)$, $q_j = \mathbb{P}(U_1 = j)$ et $r_j = \mathbb{P}(X = j)$.

Partie I - Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables U_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel de l'intervalle $]0;1[$.

1. Justifier que, pour n dans $\mathbb{N}^*$, X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.
2. Pour tout entier naturel j, établir : $r_j = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = j)p_n$.
3. Dans cette question **3**, on suppose que N suit la loi binomiale de paramètres m un entier naturel, et π un réel dans $]0;1[$. Soit j un entier naturel.
   (a) Justifier que $r_j = 0$ si $j > m$.
   (b) Établir : si $j \in [\![0;m]\!]$, alors $r_j = \displaystyle\sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$.
   (c) Vérifier : pour tous entiers j, n, m tels que $0 \leq j \leq n \leq m$, $\displaystyle\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}$.
   (d) En déduire, pour tout $j \in [\![0;m]\!]$: $r_j = \displaystyle\binom{m}{j}(p\pi)^j \sum_{k=0}^{m-j} \binom{m-j}{k} \big((1-p)\pi\big)^k (1-\pi)^{m-j-k}$.
   (e) Montrer finalement que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de m, p et π.
   (f) En `Python`, la commande `rd.binomial(n,p)` permet de simuler une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
   Recopier et compléter les lignes manquantes du programme suivant afin que l'exécution de `simulX(m,pi,p)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

```python
import numpy.random as rd

def simulX(m,pi,p):
    N=rd.binomial(m,pi)
    X=...
    for k in ......
        X=......
    return X
```

   (g) L'exécution du programme suivant affiche `0.997`. Interpréter cette valeur.

```python
L=[simulX(10,0.2,0.5) for k in range(1000)]
print(sum(L)/len(L))
```

4. On suppose dans cette question **4** que N suit la loi de Poisson de paramètre λ, réel strictement positif.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel j, on a :
$$r_j = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^j}{j!}\sum_{n=j}^{+\infty}\frac{1}{(n-j)!}\big(\lambda(1-p)\big)^{n-j}$$
   (b) En déduire que X suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de p et λ.

Partie II – La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout y réel et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\binom{y}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(y-i) \quad \text{et} \quad \binom{y}{0} = 1$$

5. (a) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def cb(y,k)` qui renvoie la valeur de $\binom{y}{k}$, pour $y \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.

   (b) Vérifier : $\forall y \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \binom{y}{k} > 0$.

6. *La formule du binôme négatif.*
   Soient c un réel strictement positif et x un réel de $[0;1[$.

   (a) On définit la fonction f sur $[0;x]$ par : $\forall t \in [0;x],\ f(t) = \dfrac{1}{(1-t)^c}$.
   Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;x]$ et établir :

   $$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0;x],\ f^{(k)}(t) = k!\binom{c+k-1}{k}\frac{1}{(1-t)^{c+k}}$$

   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}}dt$.

   - **Pour les étudiants de mathématiques approfondies.** En déduire, à l'aide d'une formule de Taylor :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n}\binom{c+k-1}{k}x^k + c\binom{c+n}{n}\mathrm{I}_n$$

   - **Pour les étudiants de mathématiques appliquées.** On admet :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n}\binom{c+k-1}{k}x^k + c\binom{c+n}{n}\mathrm{I}_n$$

   (c) Vérifier que pour tout $t \in [0;x]$: $0 \leq \dfrac{x-t}{1-t} \leq x$.
   En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement : $0 \leq \mathrm{I}_n \leq \dfrac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$.

   (d) i. Montrer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{k}\right)$.

   ii. Montrer que pour tout réel $t \in]-1;+\infty[$, $\ln(1+t) \leq t$.

   iii. Établir, pour tout entier naturel $k \geq 2$: $\dfrac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.

   iv. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\ln\left(\binom{c+n}{n}\right) \leq c(1+\ln(n))$. En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\binom{c+n}{n}x^{n+1} = 0$.

   (e) En conclure que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\binom{c+k-1}{k}x^k$ est convergente, et établir la formule du binôme négatif :

   $$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{c+k-1}{k}x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$$

7. Soient p un réel de $]0;1[$ et r un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $p_k = \binom{r+k-1}{k}(1-p)^k p^r$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres r et p. On notera $\mathrm{Z} \hookrightarrow \mathcal{BN}(r,p)$ lorsque la variable aléatoire Z suit la loi binomiale négative de paramètres r et p.

8. Si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et p, reconnaître la loi de $\mathrm{Y}+1$.

9. *Espérance et variance.*
   Soit Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres r réel strictement positif et $p \in]0;1[$.

   (a) Montrer : pour tout entier $k \geq 1$, $k\binom{r+k-1}{k} = r\binom{r+k-1}{k-1}$.

   (b) Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(\mathrm{Z}) = \dfrac{r(1-p)}{p}$.

   (c) Montrer que Z admet une variance et que l'on a : $\mathbb{V}(\mathrm{Z}) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.
   On pourra commencer par calculer l'espérance de $\mathrm{Z}(\mathrm{Z}-1)$.

Partie III – Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ a sa loi donnée par $p_k = \mathbb{P}(N = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de N vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels a et b, avec $a < 1$ et $a + b > 0$, tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a, b)$.

10. *Détermination des lois de Panjer.*
   (a) Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a : $p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right)$.
   (b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$. Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre b.
   (c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.
      i. Montrer qu'il existe un unique entier naturel r, tel que : $\forall k > r, p_k = 0$ et $\forall k \leq r, p_k \neq 0$. *On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les p_k tous strictement positifs.*
      ii. Montrer : $b = -a(r + 1)$.
      iii. Établir que pour tout $k \in [\![0; r]\!], p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0$. En déduire que $p_0 = \frac{1}{(1-a)^r}$.
      iv. En conclure que N suit une loi binomiale et préciser les paramètres en fonction de a et b.
   (d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
      i. Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $p_k = \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k p_0$.
      ii. En déduire que N suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de a et b.
11. Montrer que, dans tous les cas, N admet une espérance et une variance, données par : $\mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a}$ et $\mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}$.

Partie IV – L'algorithme de Panjer

On reprend les notations de l'introduction du sujet et de la partie III.
Si A est un événement de probabilité non nulle et Y une variable aléatoire, on note $E_A(Y)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant A ; autrement dit, on a : $\mathbb{E}_A(Y) = \sum_{k \in Y(\Omega)} k \mathbb{P}_A(Y = k)$.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(X_n = 0)$ en fonction de q_0 puis établir que $r_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} {q_0}^n p_n$.
13. Soit $j \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(X_n)$? En déduire : $\mathbb{E}_{[X_n=j])}(U_1) = \frac{j}{n}$.
   (b) Établir : $r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = j)\left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_{[X_n=j]}\left(a + \frac{b}{j} U_1\right) \mathbb{P}(X_n = j) p_{n-1}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{E}_{[X_n=j]}\left(a + \frac{b}{j} U_1\right) \mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) \mathbb{P}(U_1 = i) \mathbb{P}(X_{n-1} = j - i)$.
   (d) En conclure : $r_j = \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i}$, puis : $r_j = \frac{1}{1 - aq_0} \left(\sum_{i=1}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i} \right)$.
   Cette formule permet de calculer récursivement les nombres r_j et ainsi de déterminer la loi de X.
14. *Des exemples d'application.*
   (a) Dans cette question, les variables U_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.
      i. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $r_j = \frac{p}{1 - a + ap}\left(a + \frac{b}{j}\right) r_{j-1}$. En déduire que X suit une loi de Panjer.
      ii. Retrouver les résultats des questions **3.(e)** et **4.(b)** de la partie I.
   (b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, rappelons que cela entraîne que N suit la loi de Poisson de paramètre b.
   Soit p un réel de l'intervalle $]0; 1[$.
      i. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que la famille de nombres $(q_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ définie par $q_i = \alpha \frac{p^i}{i}$ définisse une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (*loi logarithmique discrète*). On pose $q_0 = 0$.
      On suppose que les variables U_k suivent cette loi de probabilité.
      ii. Montrer que pour tout entier $j \geq 1$, on a : $r_j = \frac{b\alpha}{j} \sum_{i=1}^{j} p^i r_{j-i}$.
      iii. En utilisant un changement d'indice, établir que pour tout $j \geq 2$: $r_j = \left(p + \frac{p(b\alpha - 1)}{j}\right) r_{j-1}$, puis montrer que cette égalité est encore vérifiée pour $j = 1$.
      iv. Conclure que X suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de b, α et p.