# Devoir surveillé 4

Samedi 8 janvier - 4h00

NOM ............................................................ Prénom ............................................................

*La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation. Quelques précisions :*

- ***la copie devra présenter une marge ainsi qu'une en-tête suffisantes,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

*L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.*

*"Faire aisément ce que d'autres trouvent difficile à réaliser, c'est le talent ;
faire ce qui est impossible au talent, c'est le génie."*
Henri-Frédéric Amiel

# Exercice 1

*Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Soient A, B et C trois évènements d'une expérience aléatoire et $\mathbb{P}$ une probabilité.
   (a) Démontrer que si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
   (b) Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales.
2. Considérons $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.
   Démontrer que $f$ est bijective de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans un ensemble à déterminer, et expliciter l'expression de sa bijection réciproque.
3. On estime qu'une certaine maladie affecte 1 personne sur 10. On considère un test diagnostic ayant obtenu les résultats suivants :
   - si une personne est malade, le test est positif dans 80% des cas ;
   - si une personne n'est pas malade, le test est positif dans 10% des cas.

   On choisit une personne au hasard dans une certaine population et on considère les évènements :
   - M : "la personne est malade"
   - T : "le test effectué est positif"

   Quelle est la probabilité que la personne choisie soit malade sachant que son test s'est révélé positif ?
4. **Vrai ou faux ?** Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. *La réponse doit être justifiée.*
   (a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0_n$. Si A est inversible, alors $B = 0_n$.
   (b) La suite $(u_n)$ converge vers 2 si, et seulement si, la suite $(|u_n|)$ converge vers 2.
   (c) La somme de deux fonctions bijectives sur $\mathbb{R}$ est une fonction bijective sur $\mathbb{R}$.

---

★★★★★★★

# Exercice 2

Considérons la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$ et la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}_*^+$ puis représenter l'allure de sa courbe représentative ainsi que les premiers termes de $(u_n)$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ existe et $u_n \in [1;3]$.
3. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   (a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est croissante et que la suite $(w_n)$ est décroissante.
   (b) Justifier alors que les suites $(v_n)$ et $(w_n)$ sont convergentes.
   (c) Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $g(x) = (f \circ f)(x)$. Déterminer une expression simplifiée de $g(x)$ puis résoudre l'équation $g(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_*^+$.
   (d) Conclure sur les limites de $(v_n)$ et $(w_n)$.
4. Que peut-on en conclure sur la suite $(u_n)$ ?

---

★★★★★★★

# Exercice 3

Soit $(h_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Écrire deux fonctions `Python` prenant en argument d'entrée un entier naturel non nul $n$ et renvoyant la valeur de $h_n$ en sortie. L'une de ces deux fonctions devra utiliser l'écriture en compréhension d'une liste, l'autre non.
2. **Étude de la suite $(h_n)$.**
   (a) Déterminer le sens de variation de la suite $(h_n)$.
   (b) Démontrer que pour tout $x \in ]-1;+\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
   (c) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n \geq \ln(n+1)$. Déterminer alors la limite de la suite $(h_n)$.
3. On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par :
   $$u_n = h_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$
   (a) Démontrer que $(v_n)$ est croissante.
   (b) Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.
   (c) En déduire que les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers une même limite, notée $\ell$.
   (d) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \ell \leq u_n$.
   (e) Écrire une fonction `Python` prenant en argument d'entrée un réel strictement positif $p$ et renvoyant en sortie un encadrement de $\ell$ d'amplitude inférieure ou égale à $p$ (cette fonction pourra utiliser une des deux fonctions de la question 1, notée `h`).

---

★★★★★★★

# Exercice 4

Dans tout l'exercice, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance $n$ fois une pièce donnant PILE avec la probabilité $p \in ]0;1[$ et donnant FACE avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose les lancers indépendants et on note :

- pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $P_k$ l'évènement : "obtenir PILE au $k^{\text{ème}}$ lancer" et $F_k = \overline{P_k}$ ;
- $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenues avant l'apparition du premier PILE. On convient que $X_n$ prend la valeur $n$ si aucun PILE n'est obtenu au cours des $n$ lancers.

1. Préciser $X_n(\Omega)$.
2. Calculer $\mathbb{P}([X_n = 0])$ ainsi que $\mathbb{P}([X_n = n])$.
3. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$, une expression simple de $\mathbb{P}([X_n = k])$.
4. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.
5. Considérons la fonction $f$ définie sur $]0;1[$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k$.
   (a) Soit $x \in ]0;1[$. En exprimant de deux façons différentes $f'(x)$, établir :
   $$\sum_{k=1}^{n-1} kx^k = \frac{x - nx^n + (n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$$
   (b) En déduire l'espérance de $X_n$.
   (c) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X_n)$.

---

★★★★★★★

# Exercice 5

Un objet se déplace sur les sommets d'un triangle, nommés A, B, C, selon le schéma suivant :

- si l'objet est en A, il y reste avec une probabilité $\frac{3}{8}$, ou il se dirige vers B avec une probabilité $\frac{3}{8}$, sinon il se dirige vers C avec une probabilité $\frac{1}{4}$.
- si l'objet est en B, il y reste avec une probabilité $\frac{1}{4}$, ou il se dirige vers A avec une probabilité $\frac{1}{2}$, sinon il se dirige vers C avec une probabilité $\frac{1}{4}$.
- si l'objet est en C, il y reste.

Initialement, l'objet se situe au sommet A.
On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n$ l'évènement "l'objet est en A à l'étape $n$" et $a_n = \mathbb{P}(A_n)$. Ainsi, $a_0 = 1$. On définit de la même façon les notations $B_n, C_n$ et $b_n, c_n$.

## Partie A.

1. Donner $a_1$ puis calculer $a_2$.
2. Si à l'étape 2, l'objet était en B, quelle est alors la probabilité qu'il ait été en A à l'étape 1 ?
3. En utilisant la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
   $$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{8}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + c_n \end{cases}$$
4. (a) Déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \frac{3}{4}c_n + \frac{1}{4}$.
   (b) Déterminer alors le terme général de $(c_n)$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(c_n)$ et interpréter ce résultat.
5. (a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+2} = \frac{5}{8}b_{n+1} + \frac{3}{32}b_n$.
   (b) Déterminer alors le terme général de la suite $(b_n)$.
6. Déduire des questions précédentes le terme général de $(a_n)$.
7. On considère le programme incomplet suivant :

(a) Compléter les lignes 13,14,15,16,17,19 du programme afin que la commande `simulation(n)` renvoie une liste contenant la simulation des sommets parcourus par l'objet lors des étapes 0 à $n$ du jeu.

```
1  import numpy.random as rd
2
3  def simulation(n):
4      objet="A"
5      Lobjet=[objet]
6      for k in range(1,n+1):
7          p=rd.rand()        #réel aléatoire entre 0 et 1
8          if objet=="A":
9              if p<3/8:
10                 objet="B"
11             elif p>=3/8 and p<5/8:
12                 objet="C"
13         elif .........
14             ..........
15                 ..........
16             ..........
17                 ..........
18         Lobjet.append(objet)
19     return (..........)
20
21 def mystere(L,x):
22     for k in range(0,len(L)):
23         if L[k]==x:
24             return k
```

(b) On exécute successivement les deux instructions suivantes : `L=simulation(15)` et `mystere(L,"C")`. Voici le résultat obtenu :

```
>>> L=simulation(15)
>>> mystere(L,"C")
4
```

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

## Partie B.

*Le contexte de cette partie est le même qu'au début de l'exercice ; et les résultats de la partie* A *pourront être utilisés.*

A chaque déplacement de l'objet, on définit des points de la façon suivante :

- chaque fois que l'objet arrive en A, 1 point est crédité
- chaque fois que l'objet arrive en B, 1 point est débité
- aucun point n'est attribué quand l'objet arrive en C

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de points accumulés jusqu'à l'étape $n$ *(aucun point n'est attribué pour le point de départ en* A*)*.
Notons également $Y_n$ et $Z_n$ les variables aléatoires définies par :

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad Z_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. **Variable aléatoire $X_1$.**
   (a) Donner $X_1(\Omega)$.
   (b) Déterminer la loi de $X_1$.
   (c) En déduire $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. Donner $X_2(\Omega)$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $X_{n+1}$ en fonction de $X_n$, $Y_{n+1}$ et $Z_{n+1}$.
   (b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![-n;n]\!]$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}([X_n = n])$.
   (d) Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Donner deux évènements inclus dans l'évènement $[X_n = 0]$.
   (e) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_{n+1}) = E(X_n) + a_{n+1} - b_{n+1}$.
   (f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)$ puis déterminer une expression simplifiée de $E(X_n)$.