Concours blanc 1

Samedi 4 décembre - 4h00

NOM .... Prénom ....

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation. Quelques précisions :

- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"Faire aisément ce que d'autres trouvent difficile à réaliser, c'est le talent ;
faire ce qui est impossible au talent, c'est le génie."
Henri-Frédéric Amiel

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'utiliser `Python` pour déterminer des indicateurs d'une série statistique.
Dans tout l'exercice, on considérera donc un sondage fictif dans lequel des individus ont été interrogés sur leur taille. Les données brutes (en cm) obtenues seront stockées dans une liste, notée `ListeSondage` dans `Python`.

Soient n un entier naturel non nul et $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ une série statistique de données quantitatives. On rappelle les éléments statistiques suivants :

- On appelle **variance** de la série statistique, notée $\mathrm{V}(x)$, le réel défini par :

$$\mathrm{V}(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2$$

  où $\overline{x}$ désigne la moyenne de la série statistique x.
  $\mathrm{V}(x)$ est ainsi un réel positif et on définit **l'écart-type** de x, noté $\sigma(x)$, par : $\sigma(x) = \sqrt{\mathrm{V}(x)}$.
- On appelle **médiane** de la série statistique, notée $med(x)$, un réel qui partage la série statistique *ordonnée* en deux parties de même effectif. Une fois la série statistique ordonnée, si son effectif est impair, la médiane est alors la valeur centrale de la série ; si l'effectif est pair, il est habituel de prendre la moyenne des deux valeurs centrales. On parlera alors de *la* médiane.
- On appelle **premier quartile** (resp. **troisième quartile**) de la série statistique, notée $\mathrm{Q}_1(x)$ (resp. $\mathrm{Q}_3(x)$), la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25% (resp. 75%) des valeurs de la série soient inférieures ou égales à $\mathrm{Q}_1(x)$ (resp. $\mathrm{Q}_3(x)$).

On considère le programme suivant :

```
1  import numpy as np
2
3  def moyenne(L):
4      m = ..................
5      return m
6
7  def variance(L):
8      m=moyenne(L)
9      Lvar = ..............
10     v = ..................
11     return v
12
13 ........................
14 ........................
15
16
17 def listeordonnee(L):       # fonction pour ranger une liste dans l'ordre croissant
18     for k in range(1,len(L)):
19         for j in range(0,k):
20             if L[j]>L[k]:
21                 L[j],L[k]=L[k],L[j]
22     return L
23
24 def mystere(L):
25     Lbis=listeordonnee(L)
26     if len(Lbis)%4==0:     # a%b=reste de la division euclidienne de a par b
27         n=int(len(Lbis)/4)
28         m=int(3*len(Lbis)/4)
29         return Lbis[n-1],Lbis[m-1]    # Attention : numéroration de 0 à len(L)-1
30     else:
31         n=int(np.floor(len(Lbis)/4)+1)
32         m=int(np.floor(3*len(Lbis)/4)+1)
33         return Lbis[n-1], Lbis[m-1]
```

1. Recopier et compléter la ligne 4 du programme, afin que `moyenne(ListeSondage)` renvoie la moyenne de la série statistique contenue dans `ListeSondage`.
2. Recopier et compléter les lignes 9 et 10 du programme, afin que `variance(ListeSondage)` renvoie la variance de la série statistique contenue dans `ListeSondage`.
3. Recopier et compléter les lignes 13 et 14 du programme avec une fonction qui renvoie l'écart-type de la série statistique contenue dans `ListeSondage`.
4. Si la série statistique étudiée contient n valeurs, combien de fois le test `if` de la ligne 20 sera-t-il exécuté lors de l'exécution de la commande `listeordonnee(ListeSondage)` ?
5. La commande `mystere(ListeSondage)` renvoie : `(163 , 180)`. Interpréter ces valeurs. Que dire du pourcentage des valeurs appartenant à l'intervalle $[163;180]$?
6. Écrire une fonction d'en-tête `def mediane(L):` qui prend en argument d'entrée une liste `L` et renvoie en sortie la médiane de la série de valeurs contenue dans `L`.

★★★★★★★

Exercice 2

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{E} = \left\{ \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \;/\; \mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = (\mathrm{X}^3+1)\mathrm{P}(\mathrm{X}) \right\}$.

1. Vérifier que le polynôme nul appartient à $\mathcal{E}$. Le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2+1$ appartient-il à $\mathcal{E}$?
2. Prenons P un polynôme non nul appartenant à $\mathcal{E}$.
   (a) Démontrer que $\deg(\mathrm{P}) = 3$.
   (b) Démontrer que $\mathrm{P}(1) = 0$.
   (c) En dérivant la relation $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = (\mathrm{X}^3+1)\mathrm{P}(\mathrm{X})$, établir que $\mathrm{P}'(0) = \mathrm{P}''(0) = 0$.
   (d) En déduire qu'il existe un réel non nul a tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a(\mathrm{X}^3-1)$.
3. Réciproquement : démontrer que s'il existe un réel a tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a(\mathrm{X}^3-1)$, alors $\mathrm{P} \in \mathcal{E}$.
4. Combien l'ensemble $\mathcal{E}$ contient-il de polynômes ? Les décrire.

★★★★★★★

Exercice 3

Partie A. Puissances d'une matrice.

1. **Question préliminaire.**
   Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\mathrm{A}^3 - 5\mathrm{A}^2 + 8\mathrm{A} - 4\mathrm{I}_3 = 0_3$ et $\mathrm{A} \neq \mathrm{I}_3$.
   (a) Démontrer que la matrice A est inversible et exprimer A^{-1} comme une combinaison linéaire de I_3, A et A^2.
   (b) Déterminer les racines du polynôme $\mathrm{X}^3 - 5\mathrm{X}^2 + 8\mathrm{X} - 4$.
   (c) En déduire que la matrice $\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3$ n'est pas inversible.
   (d) Que peut-on alors dire du nombre de solutions de l'équation $(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3)\mathrm{X} = 0$, d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

On considère à présent la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ et on donne : $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \\ 20 & -36 & 17 \end{pmatrix}$.

2. Calculer A^3 puis vérifier que le polynôme $\mathrm{X}^3 - 5\mathrm{X}^2 + 8\mathrm{X} - 4$ est annulateur de la matrice A.
3. Résoudre l'équation $\mathrm{AX} = \mathrm{X}$, d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, puis en donner une solution, notée U_1, dont la première composante est égale à 1.
4. Notons $\mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Montrer que U_2 est solution de l'équation $\mathrm{AX} = 2\mathrm{X}$, d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
5. Résoudre l'équation $\mathrm{AX} = 2\mathrm{X} + \mathrm{U}_2$, d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, puis en donner une solution, notée U_3, dont la première composante est nulle.
6. Posons maintenant $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
   (b) Calculer $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. On notera T la matrice obtenue. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^n = \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1}$.
   (c) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la formule du binôme de Newton, retrouver l'expression de T^n.
   (e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Conclure sur l'expression de A^n.

Partie B. Application à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \; u_1 = 1, \; u_2 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+3} = 5u_{n+2} - 8u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$$

1. Écrire une fonction `Python` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie la valeur de u_n en sortie. *On veillera en particulier à la validité du programme pour renvoyer les valeurs de* u_0, u_1 *et* u_2.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.
   (a) Donner la matrice $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{BX}_n$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{X}_n = \mathrm{B}^n\mathrm{X}_0$.
3. En utilisant les résultats de la partie A, conclure sur le terme général de la suite (u_n).
4. Par récurrence, retrouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 + 3(n-2)2^{n-1}$.
5. Étudier les variations de (u_n).

★★★★★★★

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Définition : On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$. On définit de manière analogue une droite asymptote en $-\infty$.

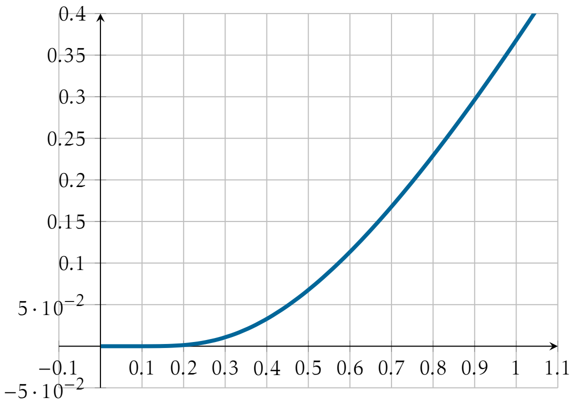
Partie A. Étude de f.

1. Étudier la parité de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes de $\mathcal{C}_f$.
3. (a) Rappeler $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{e^X - 1}{X}$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ ainsi que $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x)$
   (c) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une droite asymptote aux voisinages de $\pm\infty$.
4. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}^*$.
5. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f'(x)$.
6. (a) Établir : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) < 1$.
   (b) En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x - 1$.
7. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi. *On veillera à faire figurer toutes les informations établies précédemment permettant d'obtenir la courbe la plus précise possible.*

Partie B. Étude d'une suite.

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Écrire une fonction Python, nommée u, qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n en sortie.
2. Représenter les premiers termes de (u_n) sur le graphique ci-dessous, sur lequel la courbe de la fonction f est représentée. Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite (u_n) ?



3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in]0;1]$.
4. Étudier les variations de (u_n).
5. (a) Établir : $\forall x \in]0;1],\ f(x) \leq \dfrac{1}{e}x$.
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$.
   (c) Conclure sur l'existence et la valeur de la limite de la suite (u_n).
   (d) Résoudre l'inéquation $\left(\dfrac{1}{e}\right)^n \leq 10^{-20}$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$, puis interpréter le résultat obtenu. *Donnée :* $20\ln(10) \simeq 46{,}05$.
   (e) Le programme suivant (dans lequel u est la fonction Python définie à la question 1 de la partie B) affiche la valeur 4. Interpréter cette valeur et la comparer avec celle obtenue à la question précédente.

```python
n=0
while u(n)>10**(-20):
    n=n+1
print(n)
```

6. Considérons la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   (a) Étudier les variations de (S_n).
   (b) A l'aide du résultat établi à la question 5(b) de la partie B, démontrer que la suite (S_n) est majorée.
   (c) Que peut-on en déduire ?