Devoir surveillé 2

Samedi 9 octobre - 4h00

"Ce n'est pas la force, mais la persévérance, qui fait les grandes œuvres"
Samuel Johnson

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation. Quelques précisions :

- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

NOM .... Prénom ....

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. **Vrai ou faux.** Pour chacune des affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse, et justifier.
   (a) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \exp(a+b) = \exp(a) + \exp(b)$.
   (b) $\forall a, b \in \mathbb{R}^*,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
   (c) $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}^*,\ \left(\dfrac{a}{b} \geq 1 \Longrightarrow a \geq b\right)$
   (d) Le produit de deux suites géométriques est une suite géométrique.
   (e) Il existe deux suites arithmético-géométriques différentes dont la somme est une suite arithmético-géométrique.
   (f) Sur les 6 propositions de ce vrai ou faux, 2 exactement sont vraies.
2. Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I. Démontrer :
$$\forall a, b \in \mathrm{I},\ \big(a = b \iff f(a) = f(b)\big)$$
3. Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $f(x) = \ln(x) + x^2 + x - 5 + e^x$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_*^+$.
4. Considérons $f : x \longmapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   (b) Étudier sa parité.
   (c) Dresser son tableau de variations.
5. Considérons $f : x \longmapsto x^x$ sur $\mathbb{R}_*^+$. Étudier les variations de f.
6. Calculer $\displaystyle\sum_{k=5}^{22} (k-4)^2$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
8. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer $\ln\left(\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right)$.
9. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}$.
10. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$
    (a) Déterminer le terme général de (u_n).
    (b) En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$.
11. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ e^x \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
12. Déterminer toutes les fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, telles que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x+y)$$

13. On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k^4 = 1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 = 354$ et $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{4} k\right)^4 = (1+2+3+4)^4 = 10^4 = 10000$.

La différence entre $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{4} k\right)^4$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k^4$ est alors de 9646.

Écrire une fonction, d'en-tête `def difference(n):` qui renvoie la valeur de la différence entre $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^4$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$.

★★★★★★★

Exercice 2

Soient a, b des réels strictement positifs. Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f(x) = \ln(ax)\left(1 - \frac{b}{x}\right)$$

On suppose que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$.

1. Déterminer les valeurs de a et b.
2. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x) + x - 1}{x^2}$.
3. (a) Étudier le signe de $\ln(x) + x - 1$ en fonction des valeurs de $x \in \mathbb{R}_*^+$.
   (b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_*^+$.

★★★★★★★

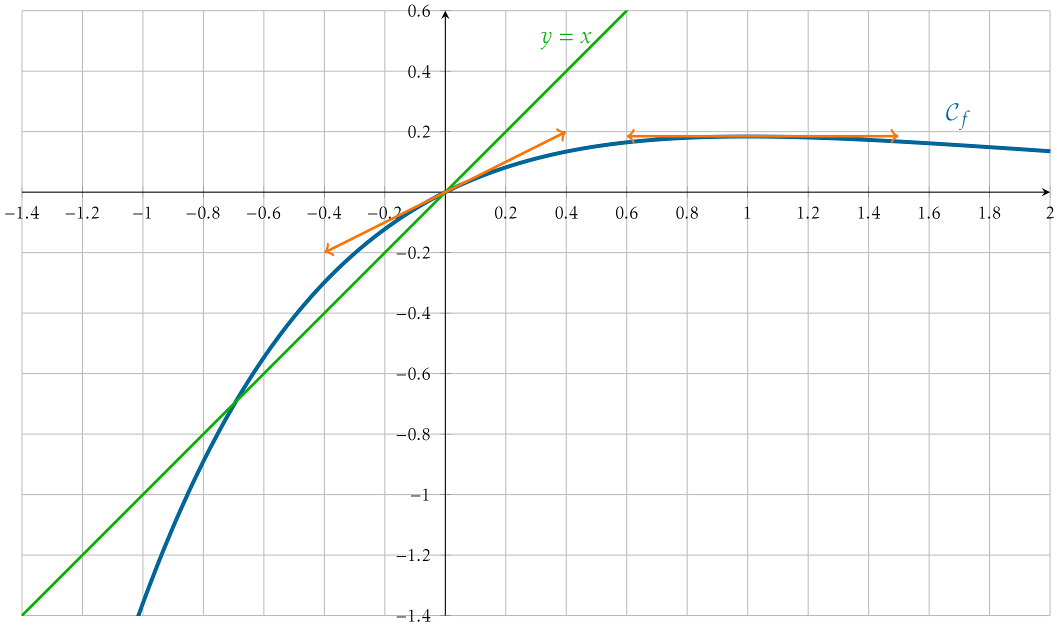
Exercice 3

On considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{2} x e^{-x}$, définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Le but de l'exercice est d'étudier la suite (u_n) en fonction des différentes valeurs de son premier terme u_0.

1. **Étude de f.**
   (a) Discuter du signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.
   (b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (c) Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, notée $\mathcal{T}_0$.
   (d) Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq \frac{1}{2} x$.
   (e) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$ et préciser leurs éventuels points d'intersection.
   (f) Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ sur le graphique ci-dessous. *Données :* $\ln(2) \simeq 0,7$ *et* $e^{-1} \simeq 0,4$.



2. Écrire une fonction Python, nommée u, prenant en arguments d'entrée un réel a et un entier naturel n et renvoyant en sortie la valeur de u_n dans le cas où $u_0 = a$.

3. (a) Représenter, en bleu sur le graphique ci-dessus, les trois premiers termes de (u_n) dans le cas où $u_0 = \frac{-4}{5}$.

   (b) Représenter, en bleu sur le graphique ci-dessus, les cinq premiers termes de (u_n) dans le cas où $u_0 = \frac{-3}{5}$.

   (c) Représenter, en rouge sur le graphique ci-dessus, les trois premiers termes de (u_n) dans le cas où $u_0 = 1$.

   (d) Dans chaque cas, émettre des conjectures sur les variations de (u_n) et son comportement en l'infini.

4. Que dire des cas "$u_0 = 0$" et "$u_0 = -\ln(2)$" ?

5. **Cas $u_0 \in]-\ln(2);0[$.** Dans cette question, $u_0 \in]-\ln(2);0[$.

   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\ln(2) < u_n < 0$.

   (b) Étudier les variations de (u_n).

6. **Cas $u_0 > 0$.** Dans cette question, $u_0 > 0$ et on admet que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ *(que l'on démontrerait aisément par récurrence).*

   (a) Étudier les variations de (u_n).

   (b) A l'aide de la question 1(d), démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$.

   (c) On suppose, dans cette question uniquement, que $u_0 = 1$.

      i. Résoudre, dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$, puis interpréter le résultat obtenu.

      ii. Le programme suivant (dans lequel u est la fonction Python définie à la question 2) renvoie la valeur 9. Interpréter cette valeur et la comparer à la valeur obtenue à la question précédente.

```python
n=0
while u(1,n)>10**(-3):
    n=n+1
print(n)
```

   (d) On considère maintenant les suites (v_n) et (S_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \ln(u_n)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

      i. Établir, pour tout entier naturel n, une relation entre v_{n+1}, v_n et u_n.

      ii. Démontrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \ln(u_0) - (n+1)\ln(2) - \ln(u_{n+1})$.

      iii. Étudier les variations de la suite (S_n) et, en utilisant le résultat de la question 6(b), démontrer qu'elle est majorée.

      iv. **Bonus :** que peut-on en déduire ? Prouver alors qu'il existe un réel $\ell \in [u_0; 2u_0]$ tel que $\lim_{n\to+\infty} 2^n u_n = u_0 e^{-\ell}$.

7. **Cas $u_0 < -\ln(2)$.** Dans cette question, $u_0 < -\ln(2)$.
   Étudier les variations de (u_n).

★★★★★★★

Exercice 4

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \end{cases}$$

1. Écrire une fonction Python, d'en-tête `def suites(n):` prenant un entier naturel n en argument d'entrée et renvoyant les valeurs de a_n et b_n en sortie.

2. Calculer a_1, b_1, a_2 et b_2.

3. **Première méthode de détermination des termes généraux.**

   (a) Déterminer une relation de récurrence d'ordre 1 sur la suite (s_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = a_n + b_n$.

   (b) Déterminer une relation de récurrence d'ordre 1 sur la suite (t_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = 2a_n - b_n$.

   (c) En déduire le terme général des suites (a_n) et (b_n).

4. **Deuxième méthode de détermination des termes généraux.**

   (a) Démontrer que (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

   (b) En déduire le terme général de (a_n) puis celui de (b_n).

5. On considère maintenant la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$. On considère le programme suivant (dans lequel la fonction suites est la fonction définie dans la question 1) :

```python
for k in range(0,5):
    print(suites(k))

def u(n):
    if n==0:
        return 0
    elif n==1:
        return 1
    else:
        return u(n-1)+2*u(n-2)

for k in range(0,10):
    print(u(k))
```

L'exécution de ce programme renvoie l'affichage :

```
>>> %Run exo4suitesimb.py
 (0, 1)
 (1, 3)
 (5, 11)
 (21, 43)
 (85, 171)
 0
 1
 1
 3
 5
 11
 21
 43
 85
 171
```

Quels liens peut-on conjecturer entre les suites (a_n), (b_n) et (u_n) ? Démontrer cette conjecture.

★★★★★★★

Exercice 5

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation suivante, que l'on nommera (E) :

$$a^b = b^a$$

où a et b sont des entiers naturels non nuls tels que $a < b$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$, avec $a < b$. Montrer que l'équation $a^b = b^a$ est équivalente à l'équation $f(a) = f(b)$, avec $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de f puis dresser son tableau de variations complet.
   On admettra et on fera apparaître dans le tableau de variations que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
3. Soit $y \in \mathbb{R}$. Discuter du nombre d'antécédents de y par f.
   En déduire les valeurs possibles de a pour l'équation (E).
4. Conclure en donnant tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls, avec $a < b$, vérifiant l'équation (E).